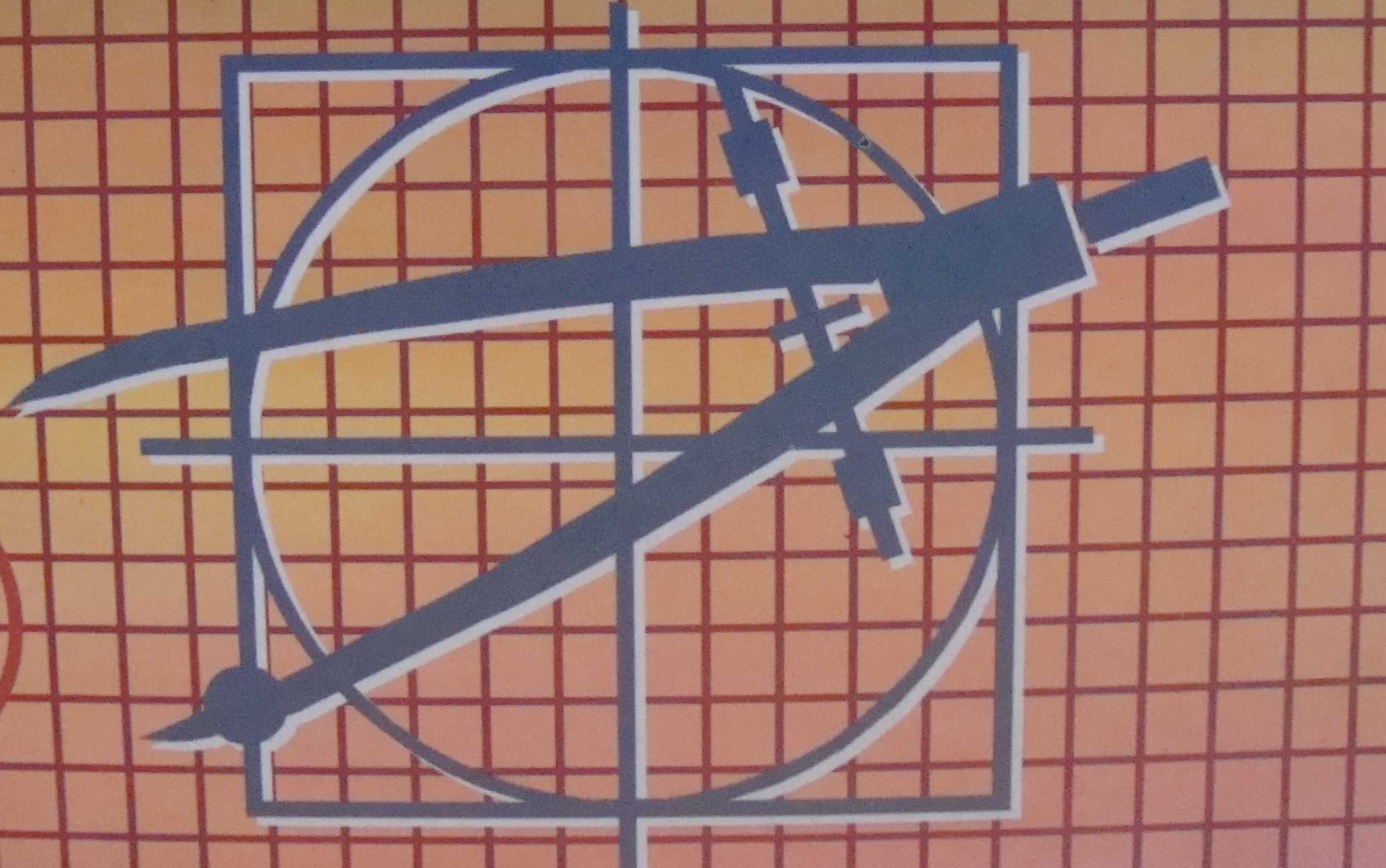
ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ



8

Լ. Ս. ԱԹԱՆԱՍՅԱՆ, Վ. Ֆ. ԲՈՒՏՈՒԶՈՎ,
Ս. Բ. ԿԱԴՈՄՑԵՎ, Է. Գ. ՊՈԶՆՅԱԿ, Ի. Ի. ՅՈՒԴԻՆԱ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ 8

Հանրակրթական դպրոցի
8-րդ դասարանի դասագիրք

ԵՐԵՎԱՆ, «ԱՍՏՂԻԿ-59», 2000թ.

ԴՏՀ 373.167.1+514(075)
ԳՄԴ 22.151g72
Ե 894

ԴԱՍԱԳԻՐՔԸ ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ Է ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ ԿՈՂՄԻՑ

Թարգմանված է ռուսերեն 9-րդ հրատարակությունից: Դասագիրքը համապատասխանեցված է առարկայական ծրագրին, օգտագործվել են «*Просвещение*» հրատարակչության տրամադրած լրացուցիչ նյութերը:

Թարգմանությունը, փոխադրումը և խմբագրումը՝ Ս. Է. Հակոբյանի

Մեթոդիստ՝ Ռ. Ս. Խաչատրյան

Հրատարակության խմբագիր և խորհրդատու՝ Գ. Ա. Ղարագեբակյան

Ե 894 **Երկրաչափություն:** Հանրակրթական դպրոցի 8-րդ դասարանի դասագիրք / Լ. Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուտուզով, Ս. Բ. Կադոմցև և ուրիշ.; /թարգմ. և խմբ. Ս. Է. Հակոբյան. --Եր., Աստղիկ-59, 2000, -144 էջ:

Ե $\frac{4306020502}{860(01) - 2000}$ 2000 թ.

ԳՄԴ 22.151g72

ISBN 99930-857 3-1

ԳԼՈՒԽ X

ՆՄԱՆ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐ

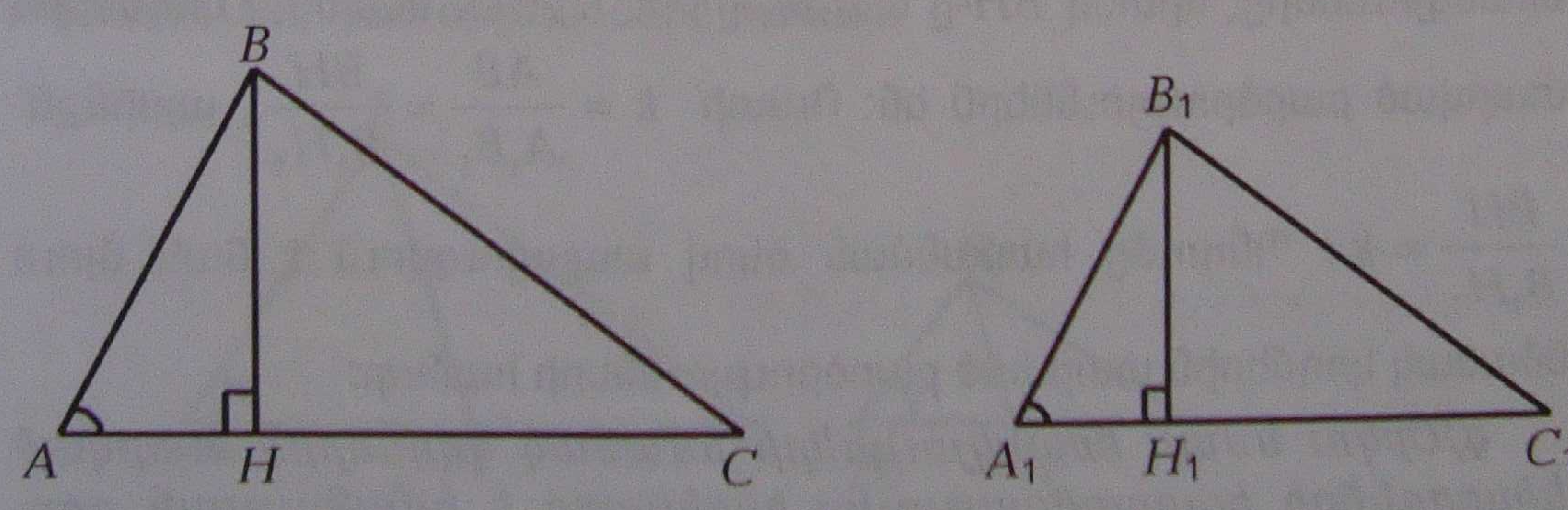
§ 1 ՆՄԱՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1 Նման եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը: Դուք արդեն գիտեք *նման եռանկյունների* սահմանումը և եռանկյունների նմանության հայտանիշները: Այժմ հետազոտենք նման եռանկյունների հատկությունները:

Թ ե ո ր ե մ : *Երկու նման եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցի քառակուսուն:*

Ա պ ա ց ու ց ու մ : Դիցուք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են (նկ. 1), ընդ որում՝ անկյուններ A-ն, B-ն և C-ն համապատասխանաբար հավասար են A_1, B_1 և C_1 անկյուններին, իսկ նմանության գործակիցը հավասար է k: Այդ եռանկյունների մակերեսները նշանակենք, համապատասխանաբար՝ S և S_1: Ապացուցենք, որ $\dfrac{S}{S_1} = k^2$:

Տանենք եռանկյունների համապատասխան բարձրությունները՝ BH-ը և B_1H_1-ը (AC-ն և A_1C_1-ը նմանակ կողմեր են): Քննության առնենք այն դեպքը, երբ $\angle A$-ն և $\angle A_1$-ը ուղիղ անկյուն չեն (դրանց ուղիղ անկյուն լինելու դեպքը քննեք ինքնուրույն): Քանի որ $\angle A=\angle A_1$, և $\angle AHB=\angle A_1H_1B_1$ (որպես ուղիղ անկյուններ), ապա ABH և $A_1B_1H_1$ եռանկյունները նման են (նմանության առաջին հայտանիշ): Ուրեմն՝



Նկ. 1

$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BH}{B_1H_1}$: Բայց $\frac{AB}{A_1B_1}=k$, ուրեմն $\frac{HB}{H_1B_1}=k$, այսինքն $HB=k\cdot B_1H_1$: Հետևաբար՝

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BH=\frac{1}{2}k\cdot A_1C_1\cdot k\cdot B_1H_1=k^2\cdot\frac{1}{2}\cdot A_1C_1\cdot B_1H_1=k^2\cdot S_1:$$

Ուրեմն՝ $\frac{S}{S_1}=k^2$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմից մասնավորապես հետևում է, *որ նման եռանկյունների մակերեսները հարաբերում են, ինչպես նմանակ կողմերի քառակուսիները:*

(2) Նման եռանկյունների գծային փարրերի հարաբերությունը:

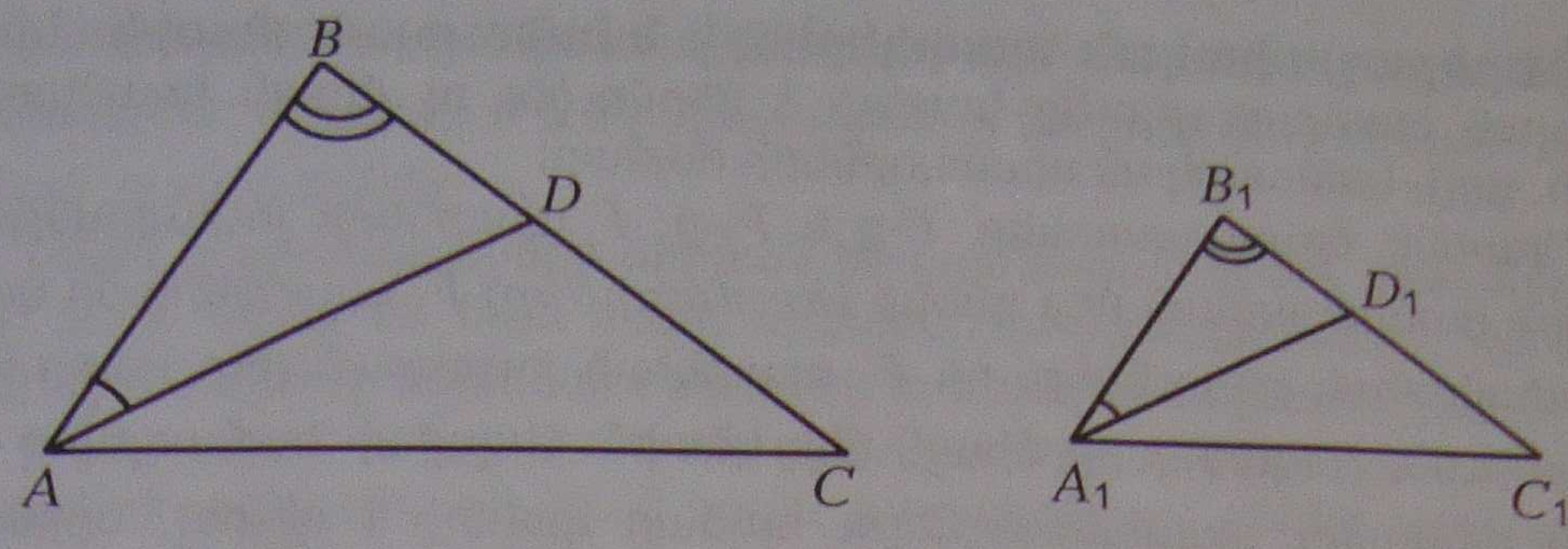
ա) *Երկու նման եռանկյունների պարագծերի հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցին:*

Իսկապես, եթե ABC եռանկյան կողմերն են a-ն, b-ն, c-ն, իսկ նրան նման $A_1B_1C_1$ եռանկյան նմանակ կողմերը՝ համապատասխանաբար՝ a_1-ը, b_1-ը, c_1-ը, և նմանության գործակիցը հավասար է k, ապա. $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k$: Այստեղից՝ $a=ka_1$, $b=kb_1$, $c=kc_1$: Հետևաբար՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների P և P_1 պարագծերի համար տեղի ունի $P=a+b+c=ka_1+kb_1+kc_1=k(a_1+b_1+c_1)=kP_1$ հավասարությունը: Ուրեմն՝ $\frac{P}{P_1}=k$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

բ) *Երկու նման եռանկյունների նմանակ կողմերին տարված բարձրությունների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցին:*

Իսկապես, դիտենք նկար 1-ը: Քանի որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են, ուրեմն նրանց համապատասխան անկյունները, օրինակ $\angle A$-ն և $\angle A_1$-ը, հավասար են: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի, նման են նաև ABH և $A_1B_1H_1$ եռանկյունները, որտեղ BH-ը և B_1H_1-ը AC և A_1C_1 նմանակ կողմերին տարված բարձրություններն են: Ուստի՝ $k=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BH}{B_1H_1}$, այսինքն՝ $\frac{BH}{B_1H_1}=k$: Պնդումը համանման ձևով ապացուցվում է նաև մյուս նմանակ կողմերին տարված բարձրությունների համար:

գ) *Երկու նման եռանկյունների նմանակ կողմերին տարված կիսորդների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցին:*



Նկ. 2

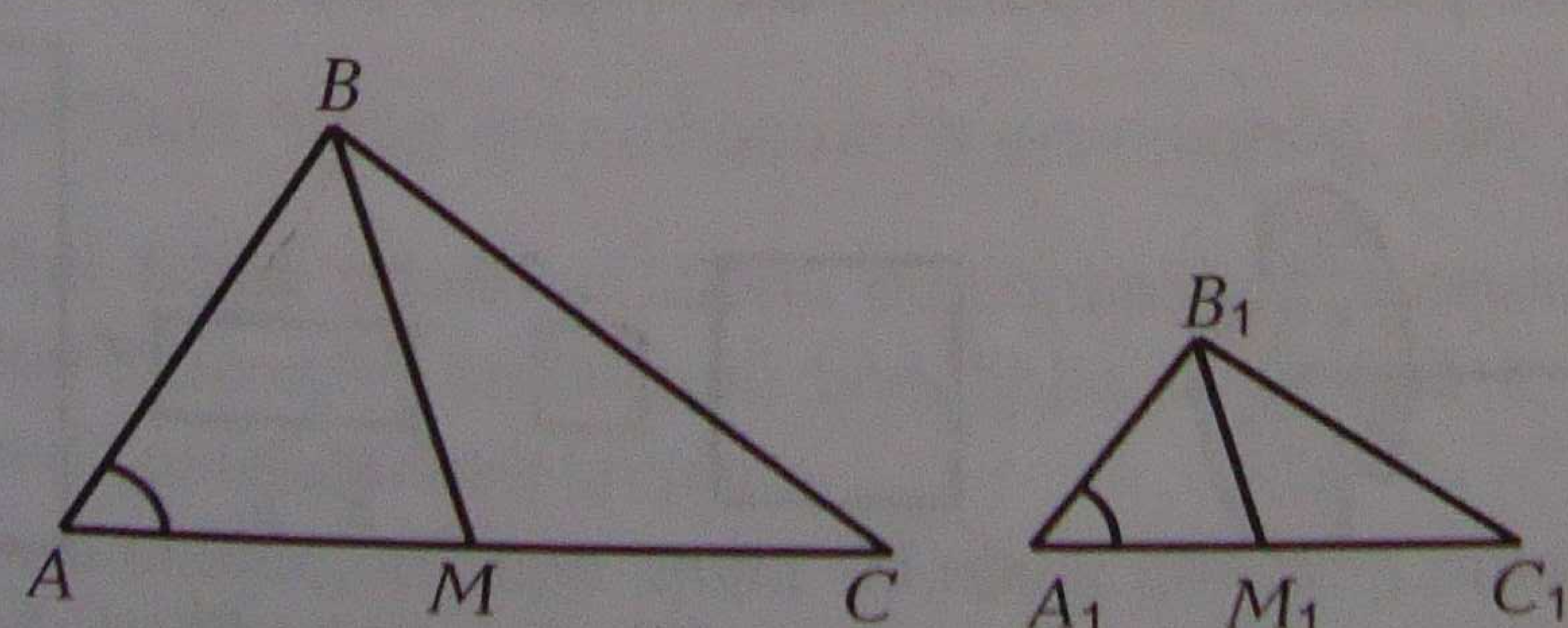
Դիցուք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են, k-ն նմանության գործակիցն է, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, իսկ AD-ն և A_1D_1-ը BC և B_1C_1 նմանակ կողմերին տարված կիսորդներն են (նկ. 2): Այդ դեպքում ABD և $A_1B_1D_1$ եռանկյունները նման են՝ ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի ($\angle BAD=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle A_1=\angle B_1A_1D_1$, իսկ $\angle B=\angle B_1$):

Ուրեմն՝ $k=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AD}{A_1D_1}$: Պնդումը համանման ձևով ապացուցվում է նաև մյուս նմանակ կողմերին տարված կիսորդների համար:

դ) *Երկու նման եռանկյունների նմանակ կողմերին տարված միջնագծերի հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցին:*

Դիցուք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են, k-ն նմանության գործակիցն է, AC-ն և A_1C_1-ը նմանակ կողմեր են (նկ. 3): Քանի որ $AM=\frac{1}{2}AC$, $A_1M_1=\frac{1}{2}A_1C_1$, ապա ABM և $A_1B_1M_1$ եռանկյունները նման են՝ ըստ եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշի ($\angle A=\angle A_1$, $AB=k\cdot A_1B_1$, $AM=k\cdot A_1M_1$): Դրանից հետևում է, որ $\frac{BM}{B_1M_1}=k$:

Պնդումը համանման ձևով ապացուցվում է նաև մյուս նմանակ կողմերին տարված միջնագծերի համար:



Նկ. 3

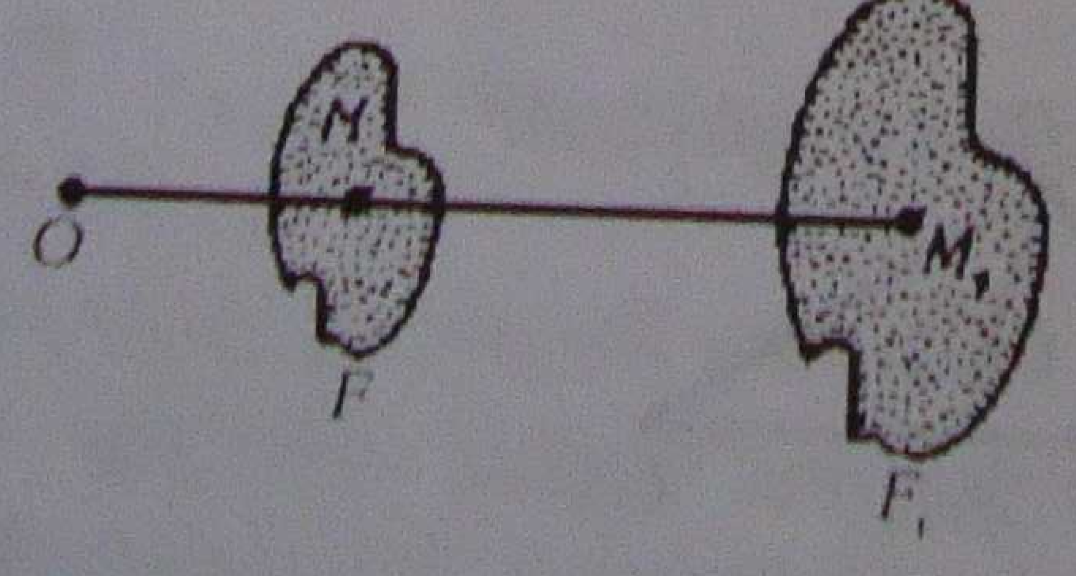
③ Երկրաչափական պատկերների նմանության մասին: Նմանության հասկացությունը կարելի է ներմուծել ոչ միայն եռանկյունների, այլև կամայական պատկերների համար:

Դիտենք երկու պատկեր՝ F-ը և F_1-ը: F պատկերի յուրաքանչյուր կետին համեմատման մեջ դնենք (*համադրենք*) F_1 պատկերի մի կետ: Միաժամանակ ընդունենք, որ F_1 պատկերի յուրաքանչյուր կետը համադրվում է F պատկերի միայն մեկ կետին: Այդպիսի համադրվող կետերն ակնառու պատկերացնելու համար կարելի է դիտել, օրինակ, որևէ առարկայի երկու լուսանկարները, որոնք միմյանցից տարբերվում են միայն չափսերով:

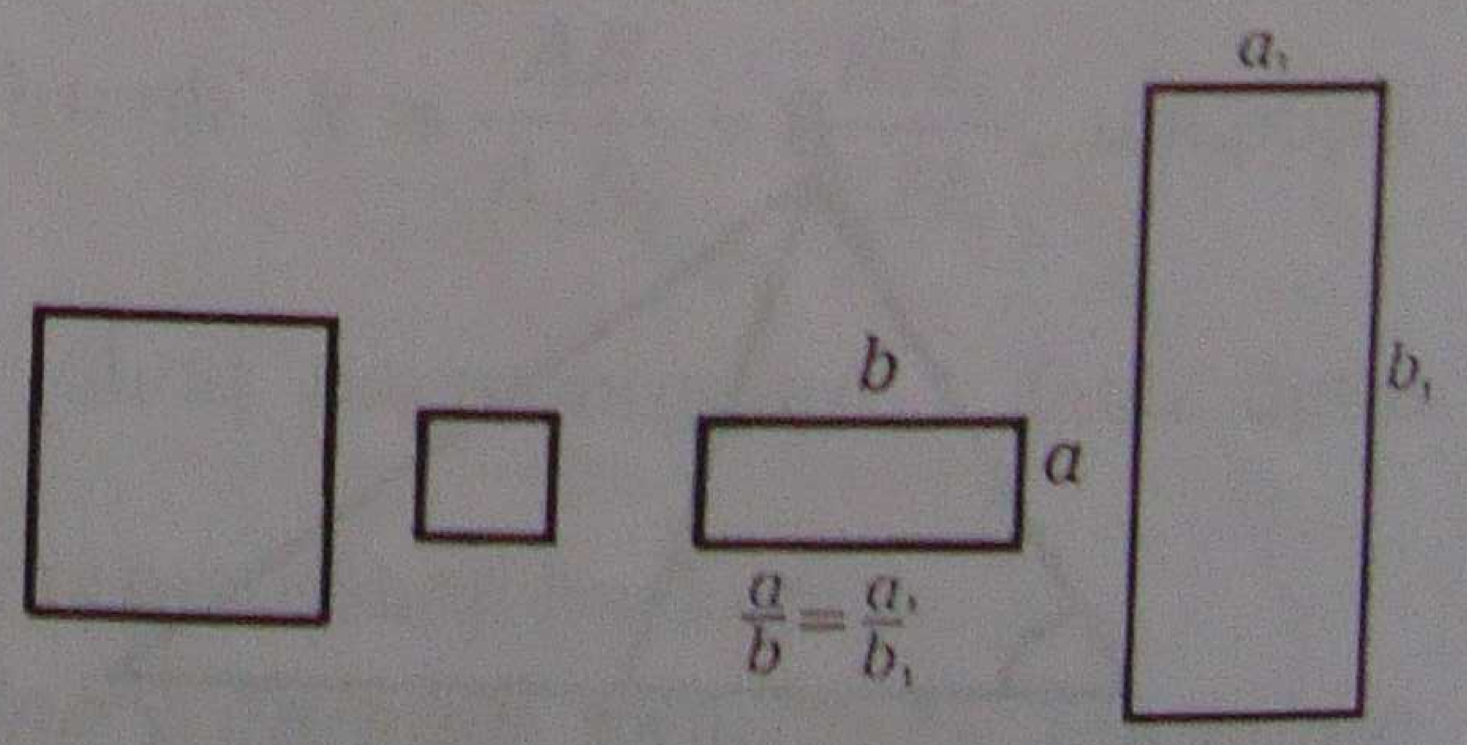
Դիցուք՝ F պատկերի կամայական երկու՝ M և N կետերին համադրվում են F_1 պատկերի երկու՝ M_1 և N_1 կետերը: Կազմենք $k = \frac{M_1N_1}{MN}$ հարաբերությունը: Եթե ընտրված բոլոր կետերի զույգերի դեպքում բավարարվում է մի պայման, այն է՝ *ստացվում է նույն k դրական թիվը*, ապա կասենք, որ այդ F և F_1 պատկերները *նման են*: k թիվը կոչվում է *նմանության գործակից*: Այն, փաստորեն, ցույց է տալիս, թե մի պատկերի կամայական երկու կետերի հեռավորությունը քանի անգամ է մեծ մյուս պատկերի՝ դրանց համադրված երկու կետերի հեռավորությունից:

Նման պատկերների դուք հաճախ եք հանդիպում առօրյա գործերի ընթացքում: Օրինակ. կինոժապավենը էկրանի վրա ցուցադրելիս ժապավենի կադրի յուրաքանչյուր կետին համադրվում է մի կետ էկրանի պատկերի վրա: Այդ դեպքում բոլոր հեռավորությունները մեծանում են նույնքան անգամ. այլապես պատկերը կաղավաղվեր, և, ասենք, մարդկանց դիմագծերը չէին պահպանվի:

Նկար 4-ում ցուցադրված է նման պատկերների կառուցման մի եղանակ: F պատկերի կամայական M կետին համադրվում է մի այնպիսի M_1 կետ, որը գտնվում է նախապես սևեռված O սկզբնակետով OM ճառագայթի վրա: Այստեղ $OM_1=kOM$ (նկ. 4-ում k=3): Այդ



Նկ. 4



ա) բ)

Նկ. 5

համադրության արդյունքում ստացվում է մի F_1 պատկեր, որը նման է F պատկերին: Այդպիսի F և F_1 պատկերները կոչվում են *կենտրոնային նման պատկերներ*:

Նման քառանկյունների օրինակ են ցանկացած երկու քառակուսին (նկ. 5,ա): Նման են նաև երկու այնպիսի ուղղանկյունները, որոնցից մեկի կից կողմերը համեմատական են մյուսի կից կողմերին (նկ. 5,բ):

Կամայական տեսքով նման պատկերների օրինակ են միևնույն տեղանքի աշխարհագրական երկու քարտեզները, որոնք կատարված են տարբեր մասշտաբներով, ինչպես նաև նույն առարկայի տարբեր չափսի լուսանկարները:

Եռանկյունների նմանության մասին դուք գիտեք մեկ այլ սահմանում ևս: Կարելի է ապացուցել, որ այդ սահմանումը համարժեք է այստեղ տրված ընդհանուր սահմանմանը: Դա թույլ է տալիս եռանկյունների նմանության մասին խոսել՝ առանց հատուկ նշելու, թե սահմանումներից որ մեկը նկատի ունենք:

Հարցեր և խնդիրներ

1. Քառակուսիներից մեկի անկյունագիծը 4 անգամ մեծ է մյուսի անկյունագծից: Գտեք երկրորդ քառակուսու կողմը, եթե առաջին քառակուսու պարագիծը 100սմ է:

2. Ուղղանկյուններից մեկի անկյունագծերի կազմած անկյունները հավասար են մյուս ուղղանկյան անկյունագծերի կազմած անկյուններին: Նմա՞ն են, արդյոք, այդ ուղղանկյունները: Պատասխանը հիմնավորեք:

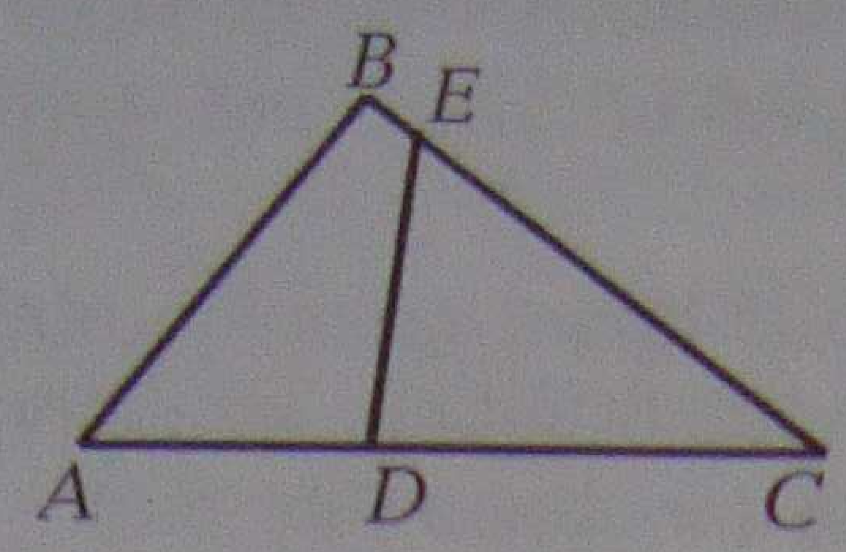
3. 60սմ պարագծով $ABCD$ ուղղանկյունը նման է $A_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյանը, որի կից կողմերի երկարություններն են 4սմ և 8սմ: Գտեք $ABCD$ ուղղանկյան կողմերը:

4. Շեղանկյուններից մեկի անկյունագծերի երկարություններն են 12սմ և 16սմ: Երկրորդ շեղանկյան անկյունները հավասար են առաջին շեղանկյան անկյուններին, իսկ կողմը երկու անգամ փոքր է առաջինի կողմից: Գտեք այդ շեղանկյունների մակերեսները:

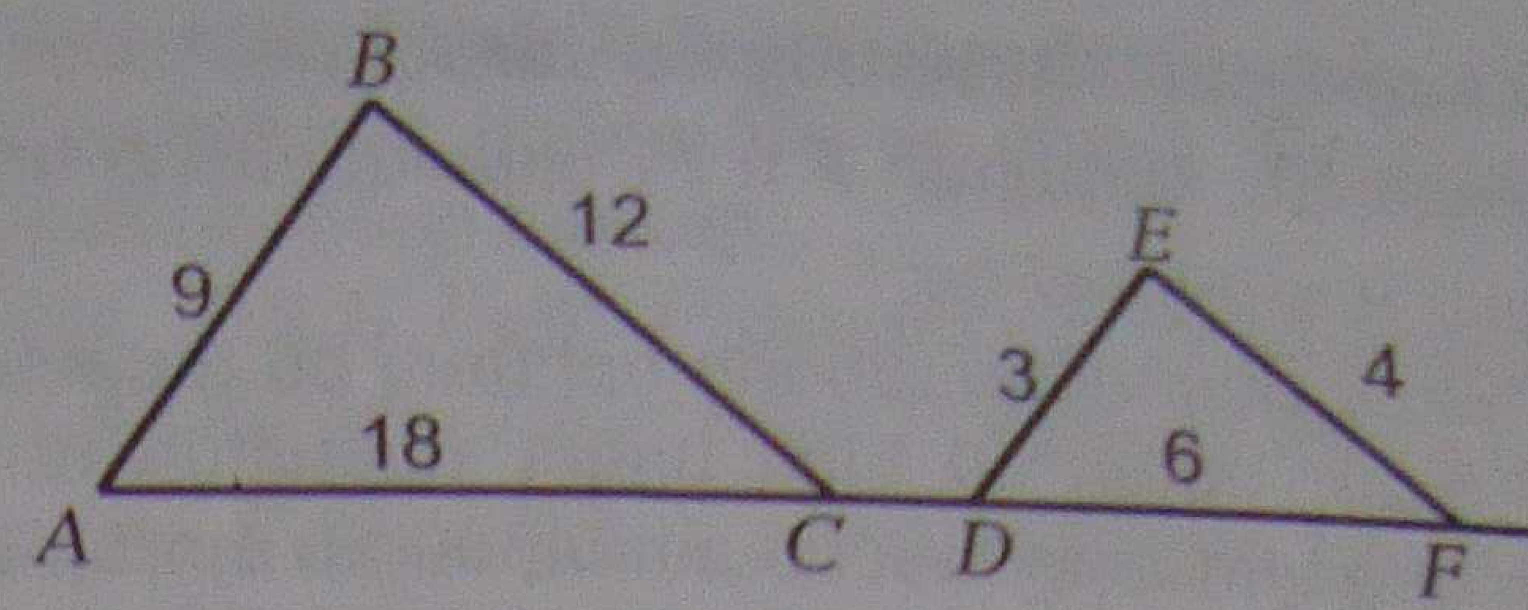
5. $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում, AB=10սմ: Գտեք զուգահեռագծի պարագիծը, եթե $\frac{BC}{CD}=\frac{AC}{OC}$:

6. Երկու նման եռանկյունների մակերեսները հավասար են 16սմ^2 և 25սմ^2: Առաջին եռանկյան կողմերից մեկը 2սմ է: Գտեք երկրորդ եռանկյան նմանակ կողմը:

7. Նման եռանկյունների երկու նմանակ կողմերը հավասար են 2սմ և 5սմ: Առաջին եռանկյան մակերեսը հավասար է 8սմ^2: Գտեք երկրորդ եռանկյան մակերեսը:



Նկ. 6



Նկ. 7

8. Նկար 6-ում ABC և DEC եռանկյունները նման են, ընդ որում DE-ն և AB-ն զուգահեռ չեն, AD=3սմ, DC=5սմ, BC=7սմ: Գտեք BE-ն:

9. Ըստ նկար 7-ի տվյալների՝ ապացուցեք, որ ABC և DEF եռանկյունները նման են, և պարզաբանեք AB և DE ուղիղների փոխադարձ դասավորությունը:

10. Եռանկյան կողմերը հավասար են 0,8մ, 1,6մ և 2մ: Գտեք այդ եռանկյանը նման եռանկյան կողմերը, եթե դրա պարագիծը 5,5մ է:

11. Մի եռանկյան պարագիծը կազմում է իրեն նման եռանկյան պարագծի $\frac{11}{13}$ մասը: Երկու նմանակ կողմերի տարբերությունը 1մ է: Գտեք այդ կողմերը:

12. BD-ն և B_1D_1-ը ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների միջնագծերն են, $\angle A=\angle A_1$, $\angle BDA=\angle B_1D_1A_1$: Ապացուցեք, որ BDC և $B_1D_1C_1$ եռանկյունները նման են:

13. ABC եռանկյան AC կողմը 12սմ է: Միջնագծերի հատման կետով տարված է AC ուղղին զուգահեռ DE ուղիղը (D և E կետերը գտնվում են եռանկյան կողմերի վրա): Գտեք DE հատվածը:

14. O կետը $ABCD$ շեղանկյան անկյունագծերի հատման կետն է, E և F կետերը BC և DC կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցեք, որ $EF=BO$ և $EF\perp AC$:

15. ABC և $A_1B_1C_1$ հավասարասրուն եռանկյունների հիմքերն են՝ AC=8սմ, A_1C_1=12սմ, իսկ $\angle B=\angle B_1$: ABC եռանկյան BK միջնագիծը 3սմ է: Գտեք $A_1B_1C_1$ եռանկյան կողմերը:

16. $ABCD$-ն ուղղանկյուն սեղան է ($\angle D=\angle C=90^0$), BC=3սմ, CD=6սմ, $BD\perp AB$: Գտեք այդ սեղանի մակերեսը:

17. Սեղանի անկյունագծերից մեկը մյուսի հետ հատման կետով տրոհվում է 3սմ և 4սմ հատվածների: Գտեք սեղանի մեծ հիմքը, եթե փոքր հիմքը 6սմ է:

18. ABC եռանկյան մեջ տարված են AA_1 և BB_1 բարձրությունները (A_1-ը և B_1-ը բարձրությունների հիմքերն են): Ապացուցեք, որ A_1CB_1 եռանկյունը նման է ABC եռանկյանը:

19. Տրված է մի եռանկյուն՝ 6սմ, 8սմ, 9սմ կողմերով: Երկրորդ եռանկյան կողմերից մեկը հավասար է 12սմ: Ի՞նչ երկարություն ունեն դրա մյուս կողմերը, եթե հայտնի է, որ այդ եռանկյունները նման են: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

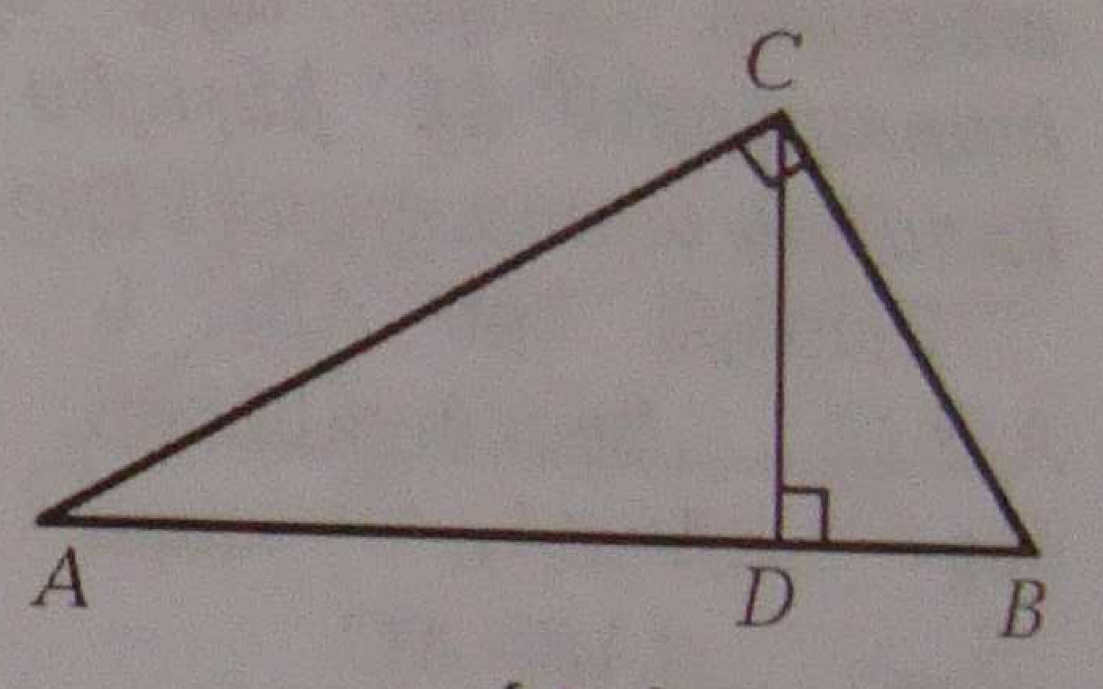
20. Հայտնի են $ABCD$ սեղանի հիմքերը. AD=8սմ, BC=2սմ: Հիմքերին զուգահեռ ուղիղը հատում է սեղանի սրունքները. AB-ն՝ M կետում, CD-ն՝ N կետում: Գտեք MN հատվածը, եթե AM=4սմ, MB=1սմ:

21. Ապացուցեք, որ եթե երկու եռանկյուններից յուրաքանչյուրը նման է երրորդ եռանկյանը, ապա այդ երկու եռանկյունները նման են:

§ 2 ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

4 Համեմատական հատվածները ուղղանկյուն եռանկյան մեջ:

Խ ն դ ի ր 1 : *Ապացուցել, որ ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը եռանկյունը տրոհում է երկու նման եռանկյունների, որոնցից յուրաքանչյուրը նման է տրված եռանկյանը:*



Նկ. 8

Լ ո ւ ծ ո ւ մ : Դիցուք՝ ABC-ն C ուղիղ անկյունով եռանկյուն է, իսկ CD-ն նրա բարձրությունն է, որը ուղիղ անկյան գագաթից տարված է AB ներքնաձիգին (նկ. 8): Ապացուցեք, որ $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, $\Delta ABC \sim \Delta CBD$, $\Delta ACD \sim \Delta CBD$:

ABC և ACD եռանկյունները նման են՝ ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի ($\angle A$-ն ընդհանուր է, $\angle ACB = \angle ADC = 90^0$): Ճիշտ նույն կերպ նման են նաև ABC և CBD եռանկյունները ($\angle B$-ն ընդհանուր է, և $\angle ACB = \angle BDC = 90^0$): Ուստի՝ $\angle A = \angle BCD$: Վերջապես, ACD և CBD եռանկյունները նույնպես նման են՝ ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի (այդ եռանկյունների մեջ D գագաթով անկյուններն ուղիղ են, և $\angle A = \angle BCD$): Ապացուցումն ավարտված է:

Ս ա հ մ ա ն ո ւ մ : *XY հատվածը կոչվում է AB և CD հատվածների համեմատական միջին (կամ՝ երկրաչափական միջին), եթե $XY = \sqrt{AB \cdot CD}$:*

Ապացուցենք հետևյալ պնդումները:

1°. *Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը համեմատական միջին է այն երկու հատվածների, որոնց տրոհվում է ներքնաձիգը այդ բարձրությամբ հատվելիս:*

Իսկապես. $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ (տե՛ս նկ. 8), ուստի՝ $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$: Հետևաբար՝ $CD^2 = AD \cdot DB$, այսինքն՝ $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$:

2°. *Ուղղանկյուն եռանկյան էջը համեմատական միջին է ներքնաձիգի և նրա այն հատվածի, որը գտնվում է տվյալ էջի և ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրության միջև:*

Իսկապես, $\Delta ADC \sim \Delta ACD$ (տե՛ս նկ. 8), ուստի՝ $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$: Հետևաբար՝ $AC^2 = AB \cdot AD$, այսինքն՝ $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$:

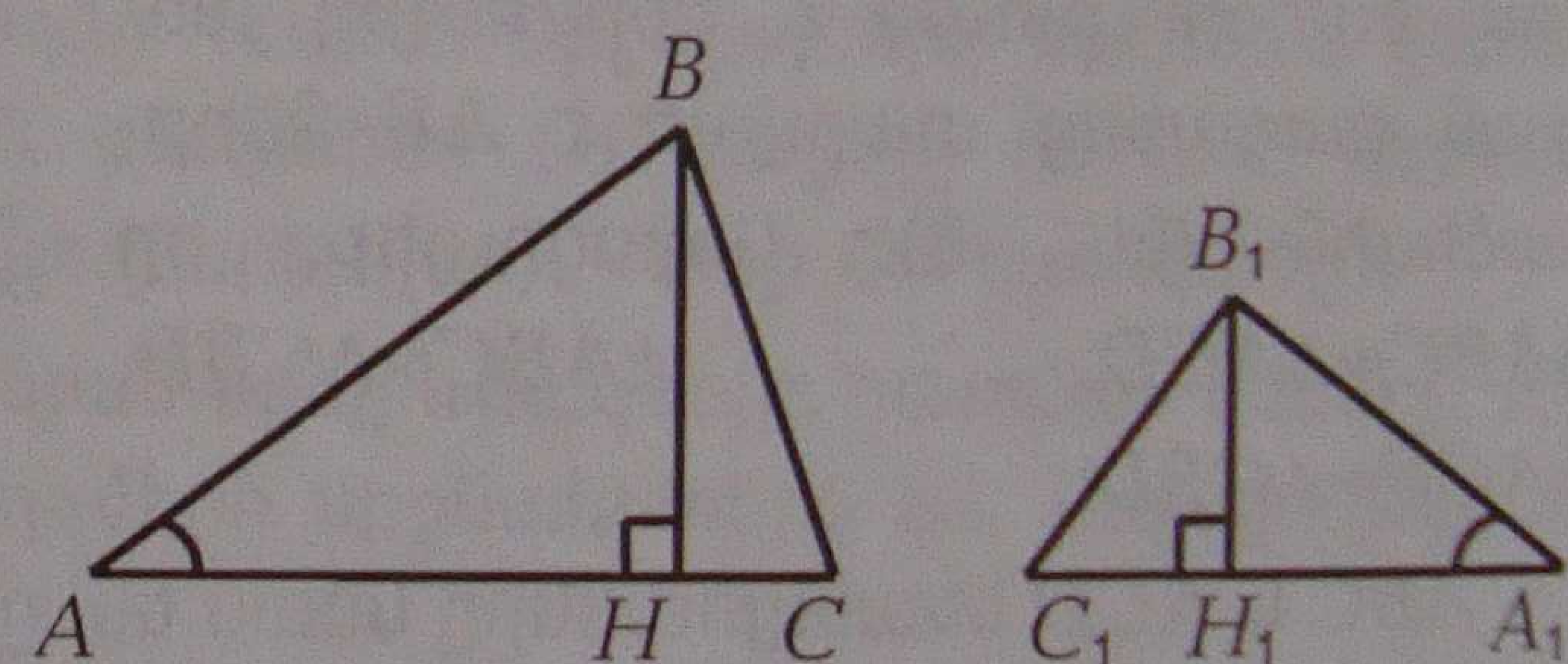
5 Եռանկյան կիսորդի հափկությունը:

Նախ վերհիշենք *մեկական հավասար անկյուն ունեցող երկու եռանկյունների մակերեսների հարաբերության մասին թեորեմը*, որ ապացուցել ենք 7-րդ դասարանում: Այն ձևակերպվում է հետևյալ կերպ. *եթե եռանկյուններից մեկի անկյունը հավասար է մյուսի անկյանը, ապա այդ երկու եռանկյունների մակերեսները հարաբերում են՝ ինչպես նրանց հավասար անկյուն կազմող կողմերի արտադրյալները:*

Այսինքն՝ եթե ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների մեջ $\angle A = \angle A_1$, ապա

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$$

(մեկ անգամ ևս ապացուցեք այդ պնդումը՝ օգտագործելով նկար 9-ում պատկերված ABH և $A_1B_1H_1$ ուղղանկյուն եռանկյունների նմանությունը):



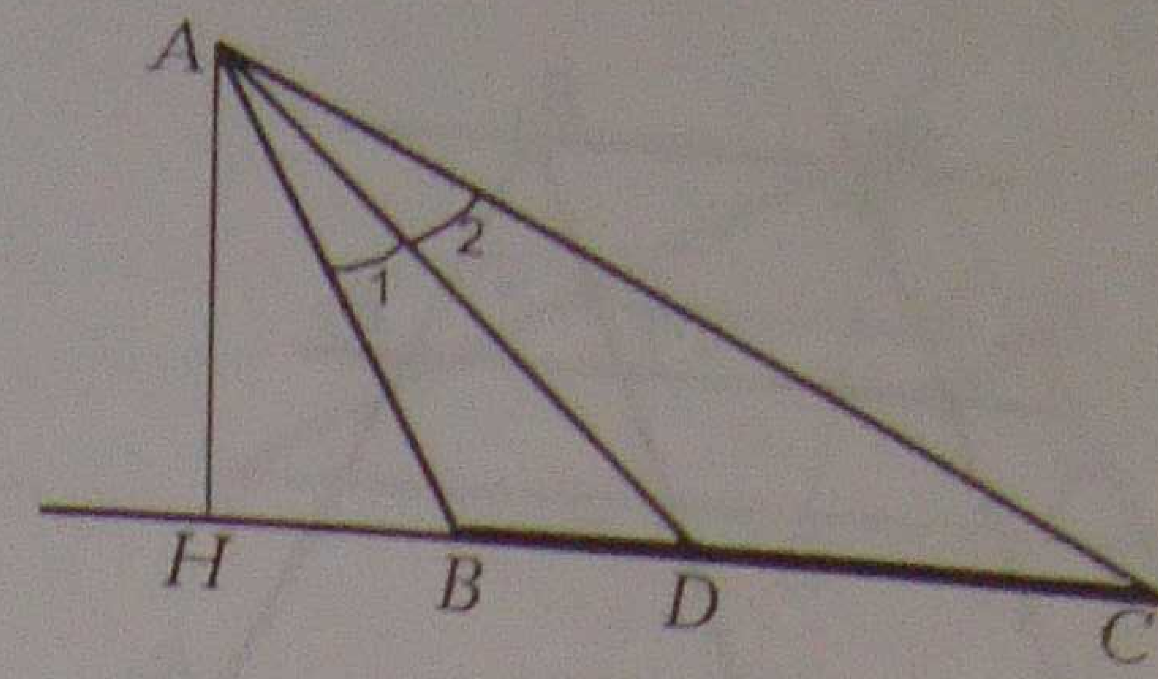
Նկ. 9

Այժմ ուսումնասիրենք եռանկյան կիսորդի մի կարևոր հատկություն:

Թ ե ո ր ե մ : *Եռանկյան անկյան կիսորդը հանդիպակաց կողմը տրոհում է երկու հատվածի, որոնք համեմատական են կից կողմերին:*

Ա պ ա ց ու ց ու մ : Դիցուք՝ AD-ն ABC եռանկյան կիսորդն է: Ապացուցենք, որ $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$ (նկ. 10):

ABD և ACD եռանկյունները ունեն ընդհանուր բարձրություն՝ AH-ը: Ուստի՝ $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{DC}$: Մյուս կողմից՝ այդ նույն եռանկյունները ունեն մեկական հավասար անկյուններ ($\angle 1 = \angle 2$): Ուստի՝ $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \frac{AB}{AC}$:



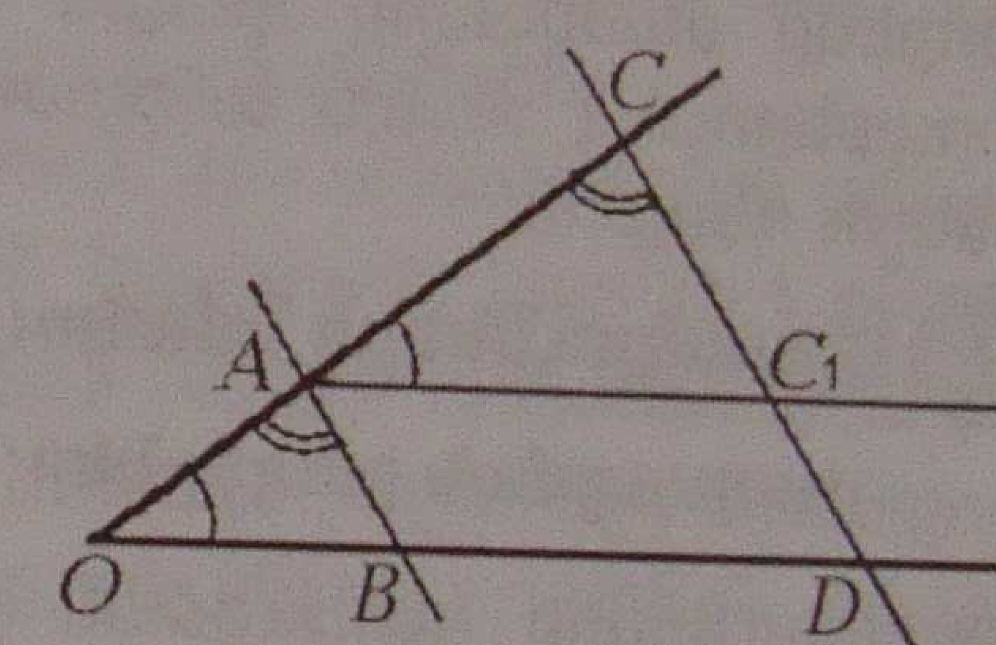
Նկ. 10

Մակերեսների հարաբերության այդ երկու հավասարությունից ստացվում է. $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, կամ $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$: Թեորեմն ապացուցված է:

(6) Երկու ուղղի՝ մի քանի զուգահեռ ուղիղներով հատումից առաջացած հատվածների համեմատականությունը:

Խ ն դ ի ր 2: *O անկյան կողմերը հատվել են AB և CD զուգահեռ ուղիղներով: Ապացուցել, որ OA և AC հատվածները համեմատական են OB և BD հատվածներին* (նկ. 11):

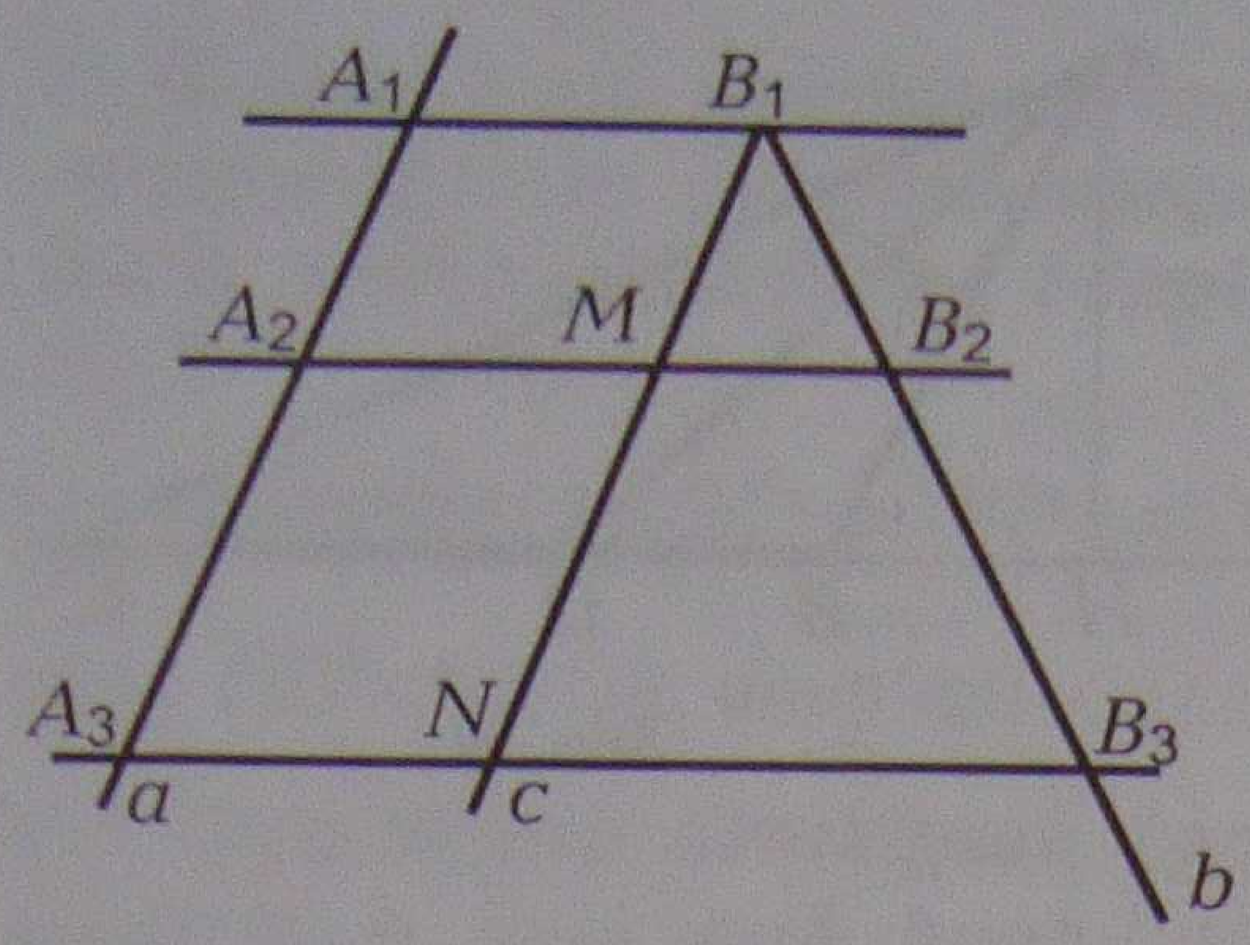
Լ ու ծ ու մ: A կետով տանենք AC_1 ուղիղը՝ զուգահեռ BD ուղղին (C_1-ը այդ ուղղի և CD ուղղի հատման կետն է): Դիտենք OAB և ACC_1 եռանկյունները: Դրանք, ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի, նման եռանկյուններ են ($\angle O = \angle CAC_1$, $\angle OAB = \angle C$): Հետևաբար՝ $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{AC_1}$:



Նկ. 11

Բայց $AC_1 = BD$ (պարզաբանեք, թե ինչու), ուրեմն՝ $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Այժմ դիտարկենք երկու ուղիղ՝ a-ն և b-ն, որոնց հատում են մի քանի զուգահեռ ուղիղներ ($A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3$): Ապացուցենք, որ a ուղղի վրա անջատված A_1A_2 և A_2A_3 հատվածները համեմատական են b ուղղի վրա անջատված համապատասխան հատվածներին՝ B_1B_2-ին և B_2B_3-ին (նկ. 12): Նախ նկատենք, որ եթե $a \| b$, ապա $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$, որտեղից հետևում է, որ պահանջվող համեմատականությունը տեղի ունի, այսինքն՝ $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$:



Նկ. 12

Ենթադրենք, որ a և b ուղիղները զուգահեռ չեն: B_1 կետով տանենք a ուղղին զուգահեռ c ուղիղը: Այն հատում է A_2B_2 ուղիղը՝ M կետում, A_3B_3 ուղիղը՝ N կետում: Կառուցումից հետևում է, որ $A_1A_2=B_1M$ և $A_2A_3=MN$: Բայց, ըստ խնդիր 2-ի, $\frac{B_1M}{B_1B_2}=\frac{MN}{B_2B_3}$: Հետևաբար՝ ստացվում է $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}$:

Այսինքն՝ *եթե երկու ուղիղներ հատվում են մի քանի զուգահեռ ուղիղներով, ապա ուղիղներից մեկի վրա անջատվում են հատվածներ, որոնք համեմատական են մյուս ուղղի վրա անջատված համապատասխան հատվածներին:*

Հատվածների համեմատականության մասին ապացուցված այս պնդումը հայտնի է որպես *Թալեսի ընդհանրացված թեորեմ*: Այս թեորեմի մասնավոր դեպքն է Թալեսի՝ ձեզ հայտնի թեորեմը, որը վերաբերում է միայն անջատված հատվածների միմյանց հավասար լինելու դեպքին:

7 Եռանկյունների նմանության գործնական կիրառություններ:

ա) Կառուցման խնդիրներ:

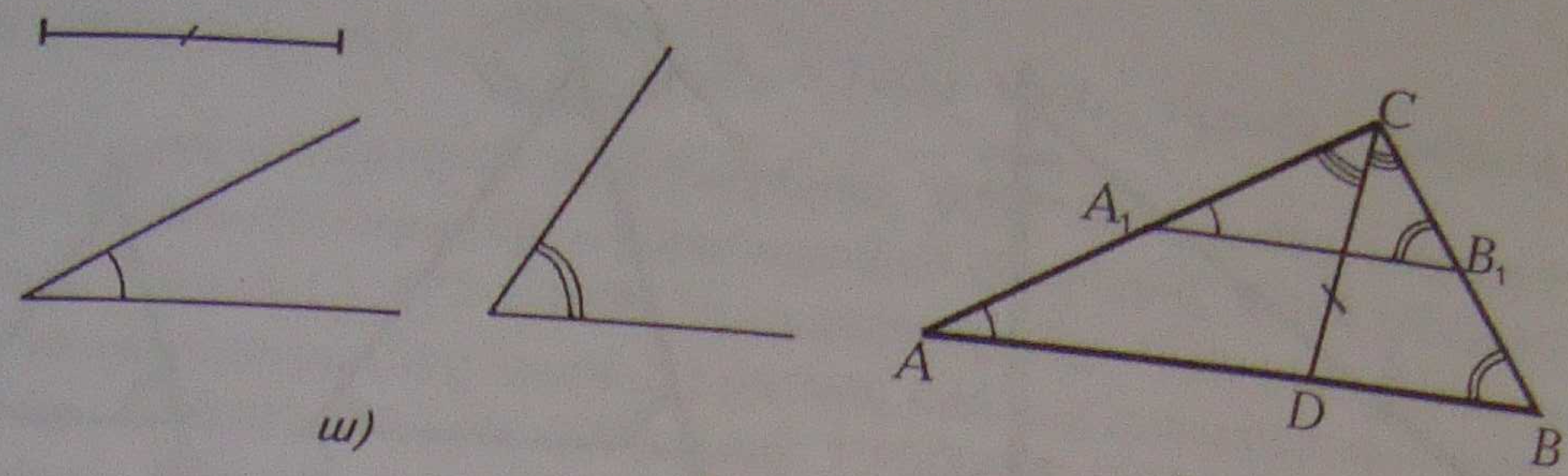
Եռանկյունների կառուցման շատ խնդիրներ լուծելիս կիրառվում է, այսպես կոչվող, *նմանության մեթոդը*: Դա խնդիր լուծելու եղանակ է, երբ որոշ տվյալների հիման վրա սկզբում կառուցվում է որոնելի եռանկյանը նման մի եռանկյուն, իսկ այնուհետև, օգտագործելով մյուս տվյալները, կառուցում են որոնելի եռանկյունը:

Դիտարկենք օրինակ:

Խնդիր: *Կառուցել եռանկյուն՝ տրված երկու անկյունով և երրորդ անկյան կիսորդով:*

Լուծում: 13,ա նկարում պատկերված են տրված երկու անկյունը և տրված հատվածը: Պահանջվում է կառուցել եռանկյուն, որի երկու անկյունները համապատասխանաբար հավասար լինեն տրված երկու անկյուններին, և երրորդ անկյան գագաթով տարված կիսորդը հավասար լինի տրված հատվածին:

Նախ կառուցենք որոնելի եռանկյանը նման մի որևէ եռանկյուն: Դրա համար գծենք մի կամայական A_1B_1 հատված և կառուցենք A_1B_1C



ա) բ)

Նկ. 13

եռանկյուն, որի A_1 և B_1 անկյունները համապատասխանաբար հավասար են տրված անկյուններին (նկ. 13,բ):

Այնուհետև կառուցենք C անկյան կիսորդը և նրա վրա տեղադրենք տրվածին հավասար CD հատվածը: D կետով տանենք A_1B_1 ուղղին զուգահեռ ուղիղ: Այն կհատի C անկյան կողմերը ինչ-որ A և B կետերում (նկ. 13,բ): Ստացված ABC եռանկյունը որոնելին է:

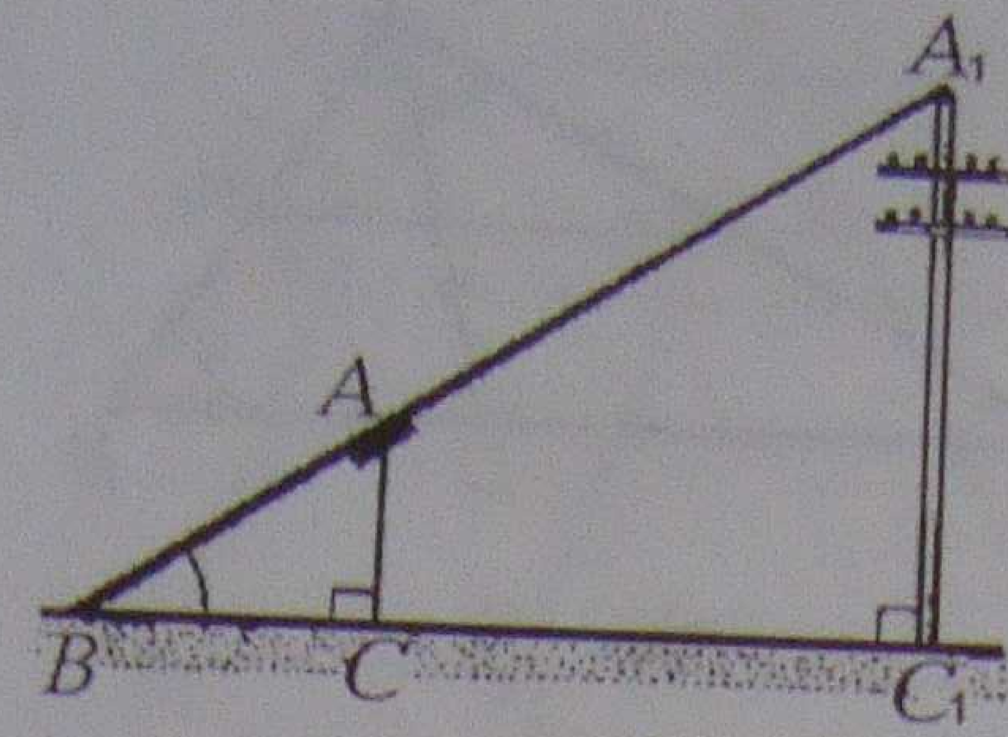
Իրոք, քանի որ $AB \parallel A_1B_1$, ապա $\angle A=\angle A_1$ և $\angle B=\angle B_1$, այսինքն՝ կառուցված ABC եռանկյան երկու անկյունները հավասար են տրված անկյուններին: Իսկ ըստ կառուցման՝ այդ ABC եռանկյան C գագաթով տարված կիսորդը հավասար է տրված հատվածին: Այսպիսով՝ ABC եռանկյունը բավարարում է տրված բոլոր պայմաններին:

Ակնհայտ է, որ խնդիրը կունենա լուծում, եթե տրված երկու անկյան գումարը փոքր է 180^0-ից: Քանի որ A_1B_1 հատվածը կարելի է ընտրել կամայական ձևով, ապա գոյություն ունեն խնդրի պայմաններին բավարարող անվերջ շատ եռանկյուններ: Սակայն բոլոր այդ եռանկյունները իրար հավասար են (պարզաբանեք, թե ինչու), այսինքն՝ խնդիրն ունի միակ լուծում:

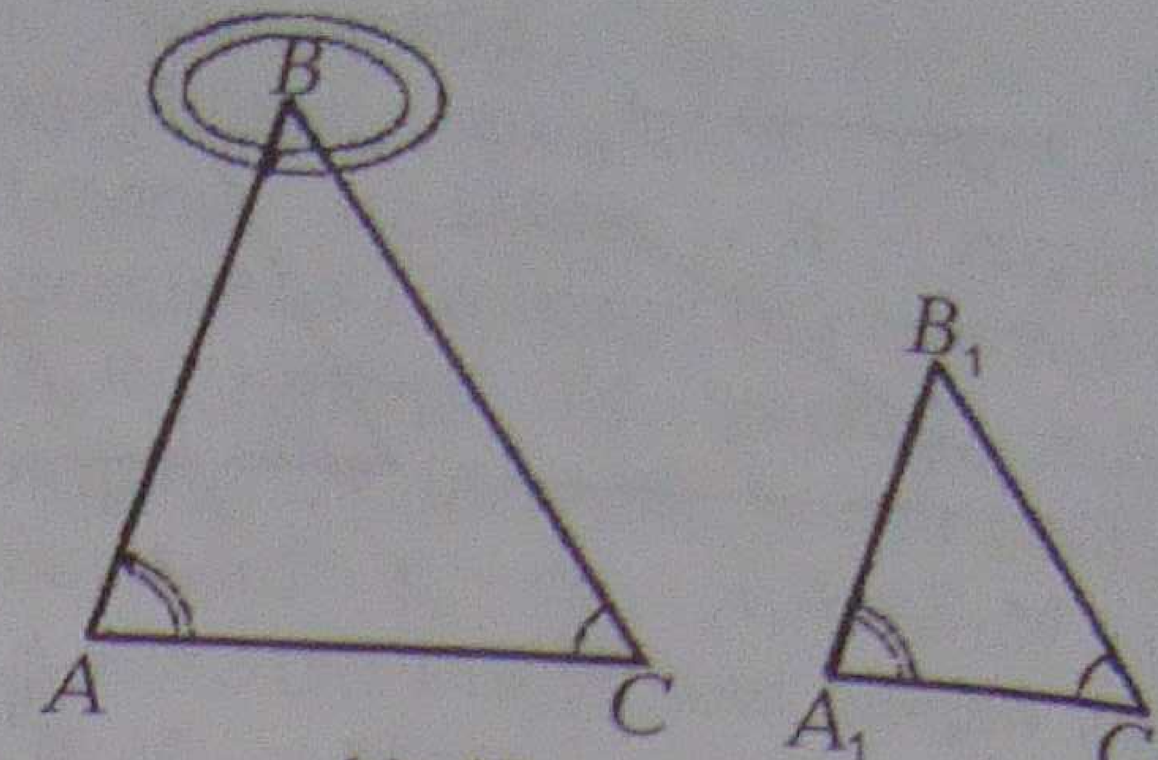
բ) **Չափողական աշխատանքներ փեղանքում:**

Նման եռանկյունների հատկությունների հիման վրա կարելի է տեղանքում կատարել բազմազան չափողական աշխատանքներ: Այստեղ դիտարկենք երկու խնդիր. ինչպես որոշել առարկայի բարձրությունը և ինչպես որոշել տրված կետից անմատչելի կետի հեռավորությունը:

Առարկայի բարձրության որոշումը: Ենթադրենք մեզ անհրաժեշտ է որոշել որևէ առարկայի, ասենք՝ հեռախոսասյան բարձրությունը (նկար 14-ում դա A_1C_1-ն է): Դրա համար հեռախոսասյունից որոշ հեռավորության վրա տեղադրենք AC ձողը, որի A ծայրին կցված է պտտաձող: Պտտաձողն ուղղենք սյան վերին A_1 ծայրակետին, ինչպես ցուցադրված է նկարում: Գետնի վրա նշենք այն B կետը, որում A_1A ուղիղը հատվում է գետնի մակերևույթին: A_1C_1B և ACB եռանկյունները նման են՝ ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի



Նկ. 14



Նկ. 15

($\angle B$-ն ընդհանուր է, $\angle C_1=\angle C=90^0$): Եռանկյունների նմանությունից հետևում է.

$$\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{BC_1}{BC}, \text{ որտեղից } A_1C_1=\frac{AC\cdot BC_1}{BC}:$$

Չափելով BC_1 և BC հեռավորությունները և իմանալով AC ձողի երկարությունը, ըստ ստացված բանաձևի՝ որոշում ենք A_1C_1 սյան բարձրությունը: Օրինակ. եթե BC_1=6,3մ, BC=2,1մ, AC=1,7մ, ապա $A_1C_1=\frac{1{,}7\cdot 6{,}3}{2{,}1}=5{,}1$մ: Հետաքրքիր է այն փաստը, որ եգիպտական բուրգերի բարձրությունը չափելու համար հենց այսպիսի եղանակ է առաջարկել հին հունական գիտնական Թալեսը, որի անունը ձեզ հայտնի է իր նշանավոր թեորեմով: Ընդ որում՝ ձողը (AC-ն) նա տեղադրել է այնպես, որ B կետում համընկնեն այդ ձողի և բուրգի ստվերների ծայրակետերը: Այսինքն, ըստ նկար 14-ի նշանակումների, BC-ն ձողի ստվերի երկարությունն է, իսկ BC_1-ը՝ բուրգի ստվերի:

Անմատչելի կետի հեռավորության որոշումը:
Ենթադրենք՝ մեզ անհրաժեշտ է որոշել A կետից մինչև անմատչելի B կետը եղած հեռավորությունը (նկ. 15): Դրա համար տեղանքում ընտրում ենք մի C կետ, ձողանշում ենք AC հատվածը և չափում նրա երկարությունը: Այնուհետև չափիչ սարքերի միջոցով չափում ենք անկյուններ A-ն և C-ն: Թղթի վրա գծագրում ենք մի $A_1B_1C_1$ եռանկյուն, որի $\angle A_1=\angle A$, $\angle C_1=\angle C$, և չափում ենք այդ եռանկյան A_1B_1 և A_1C_1 կողմերը: Քանի որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են, ապա $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$: Որտեղից՝ $AB=\frac{AC\cdot A_1B_1}{A_1C_1}$: Տեղադրելով այս բանաձևի մեջ AC, A_1B_1 և A_1C_1 հայտնի տվյալները՝ ստանում ենք AB-ն:

Հաշվումները ավելի պարզ դարձնելու նպատակով՝ $A_1B_1C_1$ եռանկյունը կառուցելիս A_1C_1 կողմի համար ընտրում ենք հարմար երկարություն: Օրինակ. եթե AC=130մ, ապա վերցնում ենք A_1C_1=130մմ:

Այս դեպքում՝ $AB = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot A_1B_1 = 1000 \cdot A_1B_1$: Ուրեմն, չափելով A_1B_1-ը՝ արտահայտված միլիմետրերով, մենք միանգամից ստանում ենք AB հեռավորությունը՝ արտահայտված մետրերով: Տվյալ դեպքում ընտրել ենք $A_1C_1:AC$=1:1000 հարաբերությունը: Կախված դիտարկվող հեռավորությունից՝ կարելի է ընտրել նաև այլ հարաբերություններ, ասենք՝ 1:10000 (1մմ-ին՝ 10մ), կամ՝ 1:1000000 (1մմ-ին՝ 1կմ) և այլն: Օրինակ. դիցուք՝ AC=130մ, $\angle A=73^0$, $\angle C=58^0$, (տե՛ս նկ. 15): Թղթի վրա կառուցում ենք $A_1B_1C_1$ եռանկյունն այնպես, որ $\angle A_1=73^0$, $\angle C_1=58^0$, A_1C_1=130մմ: Չափում ենք A_1B հատվածը: Այն հավասար է, ասենք, 153մմ, ուրեմն՝ որոնելի հեռավորությունը 153մ է:

Հարցեր և խնդիրներ

22-24 խնդիրների պայմաններում C ուղիղ անկյունով և CH բարձրությունով ABC ուղղանկյուն եռանկյան տարրերի համար օգտագործված են հետևյալ նշանակումները. $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$, $CH=h$, $AH=b_c$, $BH=a_c$:

22. Գտեք. **ա)** h-ը, a-ն և b-ն, եթե b_c=25, a_c=16, **բ)** h-ը, a-ն և b-ն, եթե b_c=36, a_c=64, **գ)** a-ն, c-ն և a_c-ն, եթե b=12, b_c=6, **դ)** b-ն, c-ն և b_c-ն, եթե a=8, a_c=4, **ե)** h-ը, b-ն, a_c-ն և b_c-ն, եթե a=6, c=9:

23. a_c-ն և b_c-ն արտահայտեք a-ով, b-ով և c-ով:

24. Ապացուցեք, որ **ա)** $h = \frac{ab}{c}$, **բ)** $\frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$:

25. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը հարաբերում են, ինչպես 3:4, իսկ ներքնաձիգը հավասար է 50մմ: Գտեք այն հատվածները, որոնց տրոհվում է ներքնաձիգը ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունով:

26. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը տրոհում է ներքնաձիգը երկու հատվածի, որոնցից մեկը 11սմ-ով մեծ է մյուսից: Գտեք ներքնաձիգը, եթե եռանկյան էջերը հարաբերում են, ինչպես 6:5:

27. 5սմ, 12սմ և 13սմ կողմեր ունեցող եռանկյան մեծ կողմին տարված է բարձրություն, որն այդ կողմը տրոհում է երկու հատվածների: Գտեք այդ հատվածները:

28. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը հարաբերում են, ինչպես 3:7, իսկ ներքնաձիգին տարված բարձրությունը հավասար է 42սմ: Գտեք ներքնաձիգի հատվածները:

29. Գտեք ուղղանկյուն եռանկյան էջերի հարաբերությունը, եթե ուղիղ անկյան գագաթից տարված միջնագիծը և բարձրությունը հարաբերում են, ինչպես 13:12:

30. BD հատվածը ABC եռանկյան կիսորդն է: **ա)**Գտեք AB-ն, եթե BC=9սմ, AD=7,5սմ, DC=4,5սմ: **բ)**Գտեք DC-ն, եթե AB=30, AD=20, BD=16 և $\angle BDC=\angle C$:

31. AD հատվածը ABC եռանկյան կիսորդն է: Գտեք BD-ն և DC-ն, եթե AB=14սմ, BC=20սմ, AC=21սմ:

32. ABC եռանկյան AD կիսորդը BC կողմը տրոհում է CD և BD հատվածների, որոնք համապատասխանաբար հավասար են 4,5սմ և 13,5սմ: Գտեք AB-ն և AC-ն, եթե ABC եռանկյան պարագիծը 42սմ է:

33. MNK եռանկյանը ներգծված է $MDEF$ շեղանկյունը այնպես, որ D, E և F գագաթները գտնվում են համապատասխանաբար MN, NK և MK կողմերի վրա: Գտեք NE և EK հատվածները, եթե MN=7սմ, NK=6սմ, MK=5սմ:

34. Տարված է եռանկյան 9սմ և 6սմ երկարություն ունեցող կողմերով կազմված անկյան կիսորդը: Եռանկյան երրորդ կողմը այդ կիսորդի հետ հատման կետով տրոհվում է հատվածների, որոնցից մեկը հավասար է տրված կողմերից մեկին: Գտեք երրորդ կողմը:

35. D կետը գտնվում է ABC եռանկյան BC կողմի վրա: Պարզեք, թե AD հատվածը կիսու՞մ է, արդյոք, A անկյունը, եթե. **ա)**AB=12սմ, AC=15սմ, BD=8սմ, DC=10սմ, **բ)**AB=12մ, AC=56մ և $BD:DC$=14:3, **գ)**$AB=\frac{5}{11}AC$, BD=2մ, DC=4,5մ, **դ)**AB=6մ, AC=28մ, $BD=\frac{3}{17}BC$:

36. Տրված են ABC եռանկյան կողմերը՝ a-ն, b-ն և c-ն: BD-ն B անկյան կիսորդն է: O կետը BD-ի և C անկյան կիսորդի հատման կետն է: Որոշեք $DO:OB$ հարաբերությունը:

37. ABC եռանկյան մեջ AB=15սմ և AC=10սմ: AD-ն A անկյան կիսորդն է: D կետից AB կողմին տարված է զուգահեռ ուղիղ, որը E կետում հատում է AC կողմը: Որոշեք AE, EC և DE հատվածները:

38. ABC հավասարասրուն եռանկյան կողմերն են՝ $AC=b$, $BA=BC=a$: AN-ը և CM-ը A և C անկյունների կիսորդներն են: Գտեք MN-ը:

39. A անկյան կողմերը հատվում են BC և DE զուգահեռ ուղիղներով, ընդ որում՝ B և D կետերը գտնվում են անկյան կողմերից մեկի, իսկ C և E կետերը՝ մյուսի վրա: Գտեք. **ա)**AC-ն, եթե CE=10սմ, AD=22սմ, BD=8սմ, **բ)**BD-ն և DE-ն, եթե AB=10սմ, AC=8սմ, BC=4սմ, CE=4սմ, **գ)**BC-ն, եթե $AB:BD$=2:1 և DE=12սմ:

40. ABC եռանկյան AD միջնագծի M կետով և B գագաթով տարված է ուղիղ, որը AC կողմը հատում է K կետում: Գտեք $\frac{AK}{KC}$ հարաբերությունը, եթե. **ա)**$AD=2\cdot AM$, **բ)**$\frac{AM}{AD}=\frac{1}{3}$:

41. $ABCD$ սեղանի AB և CD սրունքները շարունակված են մինչև M կետում հատվելը: Գտեք. **ա)** CM հատվածը, եթե AB=1մ, CD=15դմ և BM=8դմ, **բ)** BM հատվածը, եթե AB=1,2մ և $CD:CM$=2:3, **գ)** CD հատվածը, եթե $AB:BM$=17:9 և CD-CM=1,6մ:

42. B անկյան մի կողմի վրա վերցված հատվածներն են BA-ն և BD-ն, իսկ մյուս կողմի վրա վերցված հատվածները՝ BC-ն և BE-ն: Պարզեք, թե զուգահե՞ռ են, արդյոք, AC և DE ուղիղները, եթե.

ա) $BA:AD$=3:4, BC=1,2մ և BE=2,8մ, **բ)** $BD:AD$=11:8,5 և $BC=\frac{5}{17}CE$,

գ) $BA=\frac{7}{13}BD$, BC=2,8մ և CE=2մ:

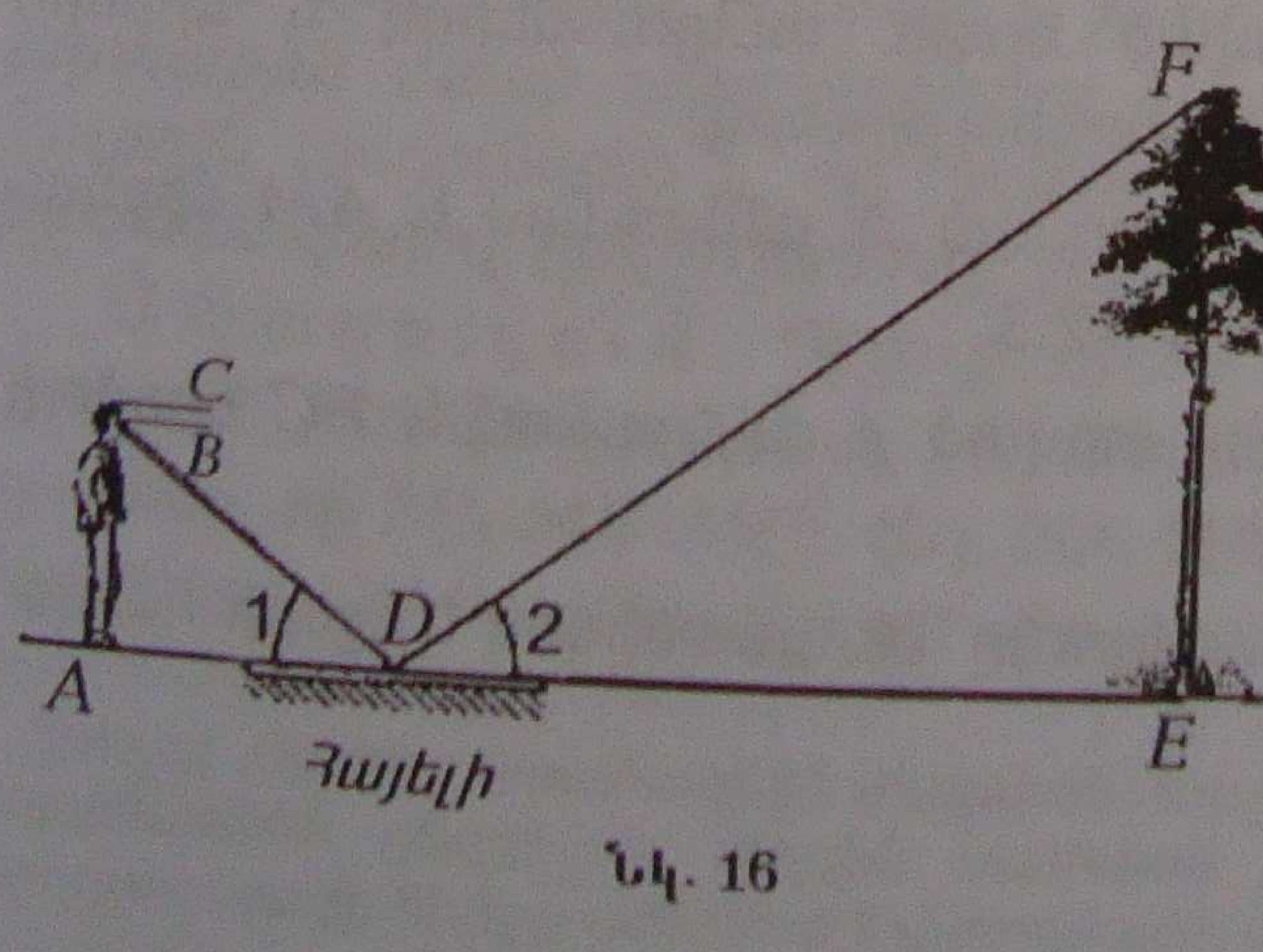
43. Սեղանի հիմքերն են 1,8մ և 1,2մ, իսկ սրունքները, որոնց երկարությունները են 1,5մ և 1,2մ, շարունակված են մինչև հատվելը: Պարզել, թե որքան է շարունակված սրունքներից յուրաքանչյուրը:

44. Նկար 14-ում պատկերված A_1C_1 սյան բարձրությունը որոշելու համար օգտագործվել է AC=1,7մ երկարությամբ ձող: Ինչի՞ է հավասար սյան բարձրությունը, եթե BC_1=6,3մ, իսկ BC=3,4մ:

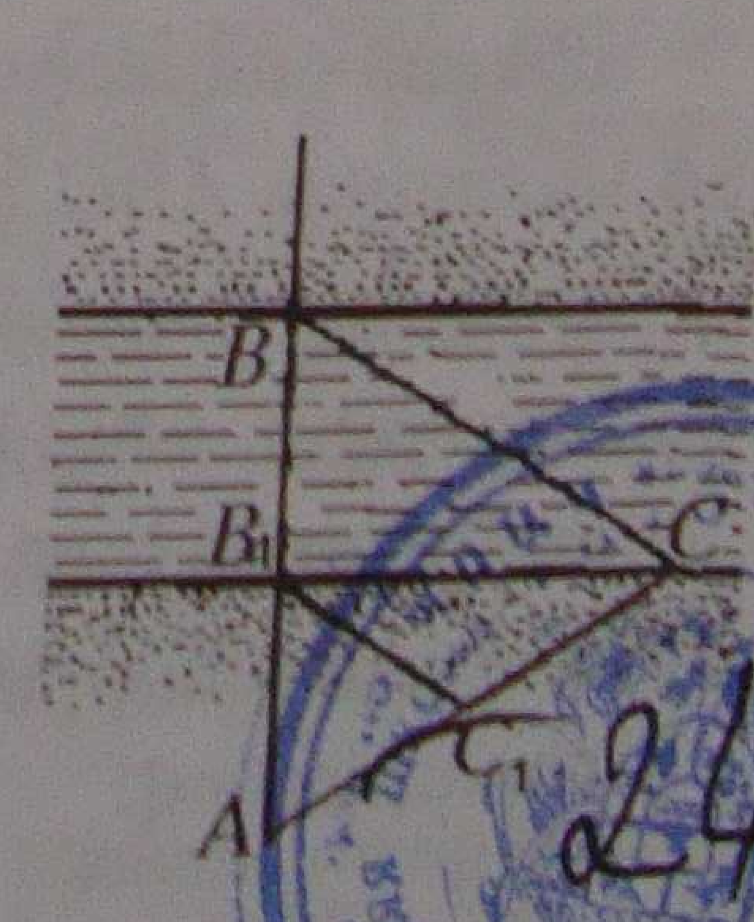
45. Ծառի ստվերի երկարությունը հավասար է 10,2մ, իսկ 1,7մ հասակ ունեցող մարդու ստվերի երկարությունը՝ 2,5մ: Գտեք ծառի բարձրությունը:

46. Ծառի բարձրությունը որոշելու համար կարելի է օգտագործել հայելին այնպես, ինչպես ցուցադրված է նկար 16-ում: Լույսի FD ճառագայթը, անդրադառնալով D կետում, ընկնում է դիտողի աչքին (B կետում): Որոշեք ծառի բարձրությունը, եթե AC=165սմ, BC=12սմ, AD=120սմ, DE=4,8մ, $\angle 1=\angle 2$:

47. Ուղեփակոցի կարճ բազուկի երկարությունը 0,75մ է, իսկ երկար բազուկինը՝ 3,75մ: Սկզբնական հորիզոնական դիրքից ինչքա՞ն կբարձրանա մեծ բազուկի ծայրը, եթե կարճ բազուկի ծայրը իջնի 0,5մ-ով: Կատարեք գծագիր:



Նկ. 16



Նկ. 17

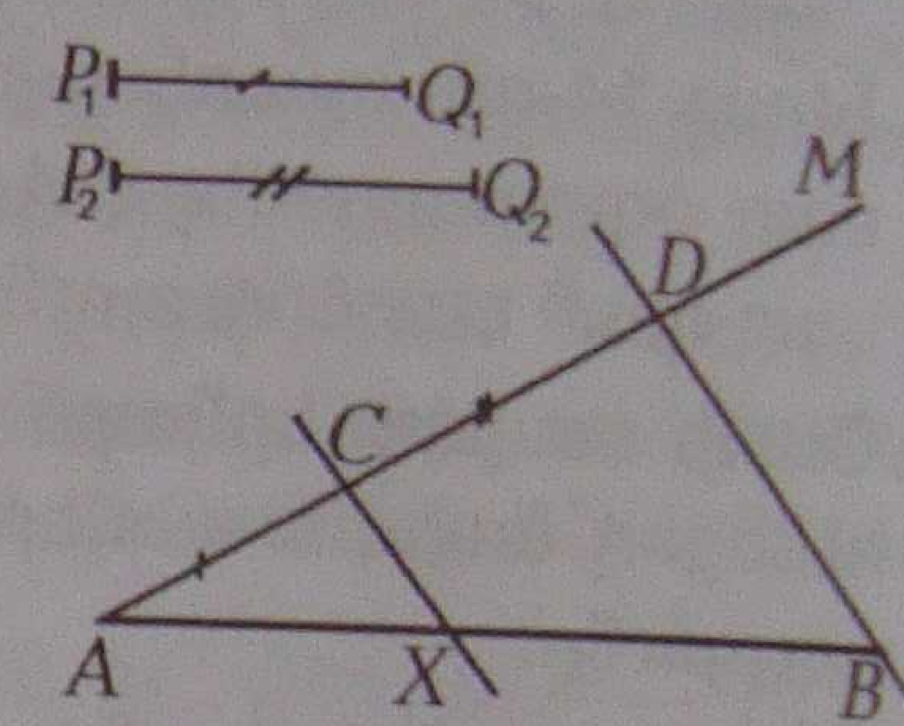
48. Տեղանքում A կետից անմատչելի B կետի հեռավորությունը որոշելու համար ընտրեցին մի C կետ, չափեցին AC հատվածը և A ու C անկյունները: Այնուհետև թղթի վրա պատկերեցին ABC եռանկյանը նման $A_1B_1C_1$ եռանկյուն: Որքա՞ն է AB հեռավորությունը, եթե AC=42մ, A_1C_1=6,3սմ, A_1B_1=7,2սմ:

49. Նկար 17-ում ցույց է տրված, թե ինչպես կարելի է որոշել գետի BB_1 լայնությունը՝ դիտարկելով երկու՝ ABC և AB_1C_1 նման եռանկյունները: Որոշեք BB_1-ը, եթե AC=100մ, AC_1=32մ, AB_1=34մ:

Կառուցման խնդիրներ

50. Տրված AB հատվածը տրոհել AX և XB երկու հատվածների, որոնք համեմատական են տրված P_1Q_1 և P_2Q_2 հատվածներին:

Լուծում: Տանենք AB ուղղի վրա չգտնվող որևէ AM ճառագայթ: Այդ ճառագայթի վրա հաջորդաբար տեղադրենք P_1Q_1 և P_2Q_2 հատվածներին հավասար AC և CD հատվածները (նկ. 18): Այնուհետև տանենք DB ուղիղը, իսկ ապա՝ DB-ին զուգահեռ և C կետով անցնող ուղիղը: Այն AB ուղիղը կհատի X կետում, և հենց AX և XB հատվածները կլինեն որոնելին (ըստ Թալեսի ընդհանրացված թեորեմի):



Նկ. 18

51. Գծեք AB հատված և այն տրոհեք հետևյալ հարաբերությամբ. **ա)**2:5, **բ)**3:7, **գ)**4:3:

52. Կառուցեք եռանկյուն՝ տրված երկու անկյուններով և դրանցից փոքրի գագաթով տարված կիսորդով:

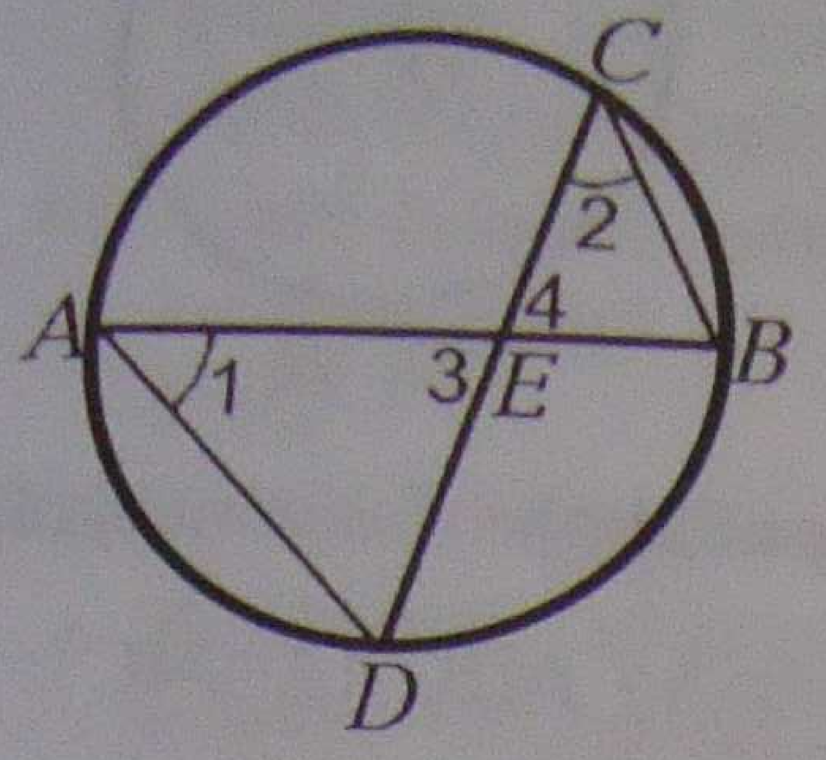
53. Կառուցեք եռանկյուն՝ տրված երկու անկյուններով և երրորդ անկյան գագաթից տարված բարձրությունով:

54. Կառուցեք ABC եռանկյունը՝ տրված A անկյունով և AM միջնագծով, եթե հայտնի է, որ $AB:AC$=2:3:

55. Կառուցեք ABC եռանկյունը՝ տրված A անկյունով և BC կողմով, եթե հայտնի է, որ $AB:AC$=2:1:

56. Կառուցեք ուղղանկյուն եռանկյունը՝ ներքնաձիգով և էջերի հարաբերությունով:

§ 3 ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ՝ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՀԵՏ ՀԱՏՈՒՄԻՑ ԱՌԱՋԱՑԱԾ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ



Նկ. 19

8 Հատվող լարերի հատկությունը:

Թ ե ո ր ե մ : *Եթե շրջանագծի երկու լարեր հատվում են, ապա լարերից մեկի հատվածների արտադրյալը հավասար է մյուս լարի հատվածների արտադրյալին:*

Ա պ ա ց ու ց ու մ : Դիցուք՝ AB և CD լարերը հատվում են E կետում (նկ. 19): Ապացուցենք, որ $AE \cdot EB = CE \cdot ED$:

Դիտարկենք ADE և CBE եռանկյունները: Այդ եռանկյուններում անկյուններ 1-ը և 2-ը հավասար են, քանի որ ներգծյալ անկյուններ են և հենվում են նույն BD աղեղի վրա, իսկ անկյուններ 3-ը և 4-ը հավասար են՝ որպես հակադիր անկյուններ: Ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի՝ $\Delta ADE \sim \Delta CBE$: Այստեղից հետևում է, որ $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{EB}$, կամ՝ $AE \cdot EB = CE \cdot ED$: Թեորեմն ապացուցված է:

Հ ե տ և ա ն ք 1^0. *Եթե շրջանագծի ներսում վերցրած որևէ կետով տարված են ցանկացած թվով լարեր, ապա յուրաքանչյուր լարի հատվածների արտադրյալը հաստատուն է այդ բոլոր լարերի համար:*

Հ ե տ և ա ն ք 2^0. *Շրջանագծի վրա վերցված կետից տրամագծին տարած ուղղահայացը[1] հավասար է տրամագծի՝ այդ ուղղահայացի հետ հատումից առաջացած երկու հատվածների համեմատական միջինին* (պարզաբանեք, թե ինչու):

9 Շրջանագծի հատողի և շոշափողի հատկությունը:

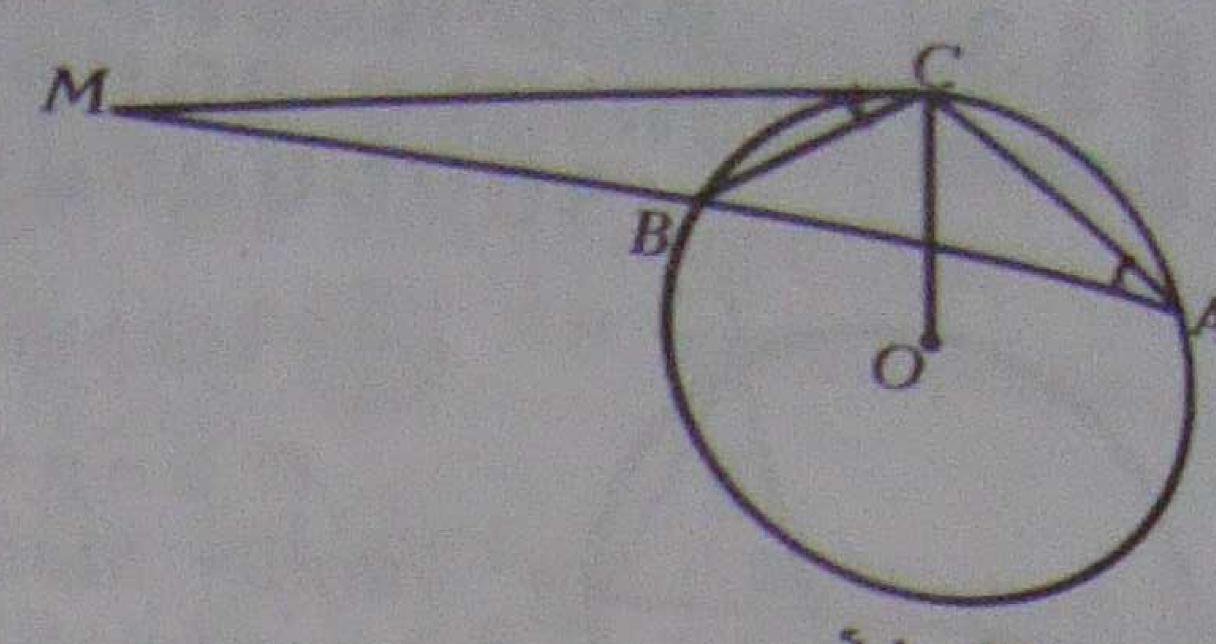
Թ ե ո ր ե մ : *Եթե շրջանագծից դուրս վերցված կետից տարված են նրան որևէ հատող և շոշափող, ապա հատողի և նրա արտաքին մասի արտադրյալը հավասար է շոշափողի քառակուսուն* (ընդունվում է, որ հատողը սահմանափակվում է երկրորդ հատման կետով, իսկ շոշափողը՝ շոշափման կետով):

Ա պ ա ց ու ց ու մ : Դիցուք՝ MC-ն O կենտրոնով շրջանագծի շոշափող է, MA-ն հատող, իսկ MB-ն հատողի արտաքին մասն է: Ապացուցենք, որ $MA \cdot MB = MC^2$ (նկ. 20): Դիտարկենք MAC և MCB եռանկյունները: $\angle M$-ը ընդհանուր է այդ եռանկյունների համար: $\angle MCB$-ն

---

[1] Ասելով «կետից տրամագծին տարված ուղղահայաց», նկատի ունենք կետից տրամագիծն ընդգրկող ուղղին տարված ուղղահայացը: Նշենք, որ այդ ուղղահայացի հիմքը գտնվում է տրամագծի վրա:

չափվում է BC աղեղի կեսով՝ որպես շոշափողով և լարով կազմված անկյուն: Բայց BC աղեղի կեսով է չափվում նաև BAC անկյունը՝ որպես ներգծյալ անկյուն: Հետևաբար՝ $\angle MCB=\angle BAC$, այսինքն՝ $\angle MAC=\angle MCB$:



Նկ. 20

Այսպիսով՝ $\Delta MAC \sim \Delta MCB$՝ ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի: Ուրեմն՝ $\frac{MC}{MB}=\frac{MA}{MC}$, որտեղից՝ $MB \cdot MA=MC^2$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Հ ե տ և ա ն ք : *Եթե շրջանից դուրս վերցրած կետից տարված են այդ շրջանագծին հատողներ, ապա յուրաքանչյուր հատողի և նրա արտաքին մասի արտադրյալը հաստատուն է այդ բոլոր հատողների համար* (այդ հաստատունը հավասար է տվյալ կետից շրջանագծին տարված շոշափողի քառակուսուն):

Հարցեր և խնդիրներ

57. Շրջանագծի որևէ կետից տրամագծին իջեցված է ուղղահայաց: Գտեք նրա երկարությունը, եթե տրամագծի հատվածները հավասար են. **ա)** 12սմ և 3սմ, **բ)** 16սմ և 9սմ, **գ)** 2մ և 5դմ:

58. Տրամագծի որևէ կետից տարված է նրան ուղղահայաց մինչև շրջանագծի հետ հատվելը: Գտեք այդ ուղղահայացի երկարությունը, եթե տրամագիծը հավասար է 40սմ, իսկ ուղղահայացի հիմքի հեռավորությունը տրամագծի մի ծայրից հավասար է 8սմ:

59. AB տրամագիծը տրոհված է երկու հատվածի՝ AC=8դմ և CB=5մ: C կետից տարված է տրամագծին ուղղահայաց՝ CD-ն: Որոշեք D կետի դիրքը շրջանագծի նկատմամբ, եթե CD-ն հավասար է **ա)** 15դմ, **բ)** 2մ, **գ)** 23դմ:

60. Երկու համակենտրոն շրջանագծերի շառավիղների տարբերությունը (օղակի հաստատունը) հավասար է 8դմ: Մեծ շրջանագծի այն լարը, որը շոշափում է փոքր շրջանագիծը, հավասար է 4մ: Գտեք շրջանագծերի շառավիղները:

61. Շրջանագծի երկու լարեր հատվում են: Մի լարի հատվածները հավասար են 24սմ և 14սմ, իսկ մյուս լարի հատվածներից մեկը՝ 28սմ: Գտեք երկրորդ լարի երկարությունը:

62. AB և CD հատվածները հատվում են M կետում այնպես, որ MA=7սմ, MB=21սմ, MC=3սմ և MD=16սմ: A, B, C և D կետերը գտնվու՞մ են, արդյոք, միևնույն շրջանագծի վրա:

63. Երկու իրար հատող լարերից մեկը տրոհված է 48մ և 3մ հատվածների, իսկ մյուսը՝ կիսվում է: Որոշեք երկրորդ լարի երկարությունը:

64. Երկու իրար հատող լարերից մեկը տրոհված է 12մ և 18մ հատվածների, իսկ երկրորդը՝ 3:8 հարաբերությամբ: Որոշեք երկրորդ լարի երկարությունը:

65. Իրար հատող երկու լարերից առաջինը 32սմ է, իսկ երկրորդ լարի հատվածներն են 12սմ և 16սմ: Որոշեք առաջին լարի հատվածները:

66. Մի կետից շրջանագծին տարված են հատող և շոշափող: Որոշել շոշափողի երկարությունը, եթե հատողի արտաքին և ներքին մասերի երկարությունները համապատասխանաբար հավասար են. **ա)** 4սմ և 5սմ, **բ)** 2,25դմ և 1,75դմ, **գ)** 1մ և 2մ:

67. Շոշափողը 20սմ է, իսկ նույն կետից տարված և շրջանագծի կենտրոնով անցնող հատողը՝ 50սմ: Գտեք շրջանագծի շառավիղը:

68. Շրջանագծի հատողն իր արտաքին մասից մեծ է $2\frac{1}{4}$ անգամ: Հատողը նույն կետից տարված շոշափողից քանի՞ անգամ է մեծ:

69. Դիցուք՝ AB-ն շոշափող է, AD-ն՝ նույն շրջանագծի հատող, որի արտաքին մասը AC-ն է: Որոշեք. **ա)** CD-ն, եթե AB=2սմ և AD=4սմ, **բ)** AD-ն, եթե $AC:CD$=4:5 և AB=12սմ, **գ)** AB-ն, եթե $AB=CD$ և $AC=a$:

70. Մի կետից տարված շոշափողն ու հատողը համապատասխանաբար հավասար են 20սմ և 40սմ, իսկ հատողի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից՝ 8սմ: Գտեք շրջանագծի շառավիղը:

71. Մի կետից շրջանագծին տարված են հատող և շոշափող: Որոշեք շոշափողի երկարությունը, եթե նա հատողի արտաքին մասից 5սմ-ով մեծ է, իսկ ներքին մասից՝ նույնքանով փոքր:

72. Մի կետից նույն շրջանագծին տարված են երկու հատող՝ որոնց երկարություններն են 15սմ և 25սմ: Գտեք նրանց արտաքին մասերը, եթե հայտնի է, որ դրանցից մեկը 2սմ-ով մեծ է մյուսից:

73. Որքա՞ն հեռու կարելի է տեսնել գետնից 4կմ բարձրության վրա գտնվող թռչող օդապարիկից (Երկրագնդի շառավիղը ընդունենք 6370կմ):

74. Որոշեք շրջանագծի կենտրոնի և այն կետի հեռավորությունը, որից շրջանագծին տարված շոշափողն ու հատողը համապատասխանաբար հավասար են 4սմ և 8սմ, իսկ հատողի հեռավորությունը կենտրոնից 12սմ է:

75. Մի կետից շրջանագծին տարված են երկու հատող, որոնց արտաքին մասերը հավասար են: Ապացուցեք, որ շրջանագծի կենտրոնը հավասարահեռ է այդ հատողներից:

1. Վերհիշեք և ձևակերպեք նման եռանկյունների սահմանումը:
2. Վերհիշեք և ձևակերպեք եռանկյունների նմանության հայտանիշները:
3. Ձևակերպեք և ապացուցեք նման եռանկյունների մակերեսների հարաբերության մասին թեորեմը:
4. Ձևակերպեք և ապացուցեք պնդումը նման եռանկյունների պարագծերի հարաբերության մասին:
5. Ձևակերպեք և ապացուցեք պնդումներ նման եռանկյունների համապատասխան. ա)բարձրությունների, բ)միջնագծերի, գ)կիսորդների հարաբերության մասին:
6. Բացատրեք, թե որ պատկերներն են կոչվում նման: Նկարագրեք կենտրոնային նման պատկերների օրինակներ:
7. Ձևակերպեք և ապացուցեք պնդում այն մասին, որ ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը եռանկյունը տրոհում է երկու նման եռանկյունների:
8. Սահմանեք երկու հատվածների համեմատական միջինի հասկացությունը, բերեք օրինակներ:
9. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեմ եռանկյան կիսորդի հատկության մասին:
10. Նկարագրեք, թե ինչպես կարելի է տրված հատվածը տրոհել տրված համեմատականությամբ հատվածների:
11. Բերեք նմանության մեթոդով կառուցման խնդրի լուծման օրինակ:
12. Նկարագրեք, թե տեղանքում ինչպես են որոշում առարկայի բարձրությունը և անմատչելի կետի հեռավորությունը:
13. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեմ՝ հատվող լարերի մասին:
14. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեմ՝ նույն կետից շրջանագծին տարված շոշափողի և հատողի մասին:
15. Ապացուցեք, որ նույն կետից շրջանագծին տարված հատողների և նրանց արտաքին մասերի համեմատականությունը հաստատուն արտադրյալով համեմատականություն է:

Լրացուցիչ խնդիրներ

76. $ABCD$ սեղանի AC անկյունագիծը սեղանը տրոհում է երկու նման եռանկյունների: Ապացուցեք, որ $AC^2=a\cdot b$, որտեղ a-ն և b-ն սեղանի հիմքերն են:

77. MNP եռանկյան MD և NK կիսորդները հատվում են O կետում: Գտեք $OK:ON$ հարաբերությունը, եթե $MN=5$սմ, $NP=3$սմ, $MP=7$սմ:

78. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքը հարաբերում է սրունքին, ինչպես 4:3, իսկ հիմքին տարված բարձրությունը հավասար է 30սմ: Գտեք այն հատվածները, որոնց տրոհվում է այդ բարձրությունը հիմքին առընթեր անկյան կիսորդով:

79. ABC եռանկյան BC կողմի վրա վերցված է D կետ այնպես, որ $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DC}{AC}$: Ապացուցեք, որ AD-ն ABC եռանկյան կիսորդ է:

80. Ապացուցեք, որ ABC եռանկյան AM միջնագիծը կիսում է BC-ին զուգահեռ ցանկացած հատված, որի ծայրերը գտնվում են AB և AC կողմերի վրա:

81. A ուղիղ անկյունով $ABCD$ սեղանի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են: AB հիմքը հավասար է 6սմ, իսկ AD սրունքը՝ 4սմ: Գտեք DC-ն, DB-ն և CB-ն:

82*. Սեղանի սրունքների վրա ծայրակետեր ունեցող հատվածը զուգահեռ է հիմքերին և անցնում է անկյունագծերի հատման կետով: Գտեք այդ հատվածի երկարությունը, եթե սեղանի հիմքերը հավասար են a և b:

83. $ABCD$ զուգահեռագծի CD կողմի միջնակետը M կետն է, իսկ BC կողմի միջնակետը՝ N կետը: Ապացուցեք, որ AM և AN ուղիղները BD անկյունագիծը բաժանում են երեք հավասար մասերի:

84. ABC ($AB \neq AC$) եռանկյան BC կողմի միջնակետով տարված է A անկյան կիսորդին զուգահեռ ուղիղ, որը հատում է AB ուղիղը՝ D կետում, իսկ AC ուղիղը՝ E կետում: Ապացուցեք, որ $BD=CE$:

85. $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերը հատվում են M կետում: Ապացուցեք, որ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, եթե $AM \cdot CM = BM \cdot DM$:

86. Շրջանագծից դուրս գտնվող A կետից տարված են երկու հատող, որոնք շրջանագիծը հատում են B_1 և C_1, B_2 և C_2 կետերում (B_1-ը գտնվում է A-ի և C_1-ի միջև, իսկ B_2-ը՝ A-ի և C_2-ի միջև): Ապացուցեք, որ. **ա)** AB_1C_2 և AB_2C_1 եռանկյունները նման են, **բ)** $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$:

87. Շրջանագծին տարված են երկու զուգահեռ շոշափողներ, և մի երրորդ շոշափող, որ հատում է զուգահեռ շոշափողները: Ապացուցեք, որ այդ շրջանագծի շառավիղը համեմատական միջին է երրորդ շոշափողի հատվածներին:

88. Եթե երկու շրջանագծեր ունեն արտաքին շոշափում, ապա նրանց ընդհանուր շոշափողի հատվածը համեմատական միջին է նրանց տրամագծերին: Ապացուցեք այդ:

89. $ABCD$ սեղանի BD փոքր անկյունագիծը ուղղահայաց է AD և BC հիմքերին: A և C սուր անկյունների գումարը 90^0 է: AD հիմքը հավասար է a-ի, BC-ն՝ b-ի: Որոշեք AB և CD կողմերը:

90. Մի կետից շրջանագծին տարված շոշափողն ու հատողը փոխուղղահայաց են: Շոշափողը հավասար է 12մ, իսկ հատողի ներքին մասը՝ 10մ: Գտեք շրջանագծի շառավիղը:

91. Մի կետից շրջանագծին տարված են երկու շոշափող: Որոշեք շոշափման կետերի հեռավորությունը միմյանցից, եթե շրջանագծի շառավիղը 7սմ է, իսկ տվյալ կետի և կենտրոնի հեռավորությունը՝ 25սմ:

92. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը հավասար են 3սմ և 4սմ: Ներքնաձիգի և փոքր էջի միջնակետերով անցնող շրջանագիծը շոշափում է մեծ էջը: Որոշեք շրջանագծի այն լարի երկարությունը, որն ընկած է ներքնաձիգն ընդգրկող ուղղի վրա:

93. Շրջանագծի ներսում վերցված M կետով տարված են երեք լար: Հայտնի է, որ M կետը այդ լարերից երկուսի միջնակետն է: M կետում ի՞նչ հարաբերությամբ է տրոհվում երրորդ լարը:

94. Տրված է a երկարությամբ հատված: Կառուցեք հատված, որի երկարությունը լինի. **ա)** $\sqrt{2}a$, **բ)** $\sqrt{3}a$, **գ)** $\sqrt{6}a$:

95. Տրված է ABC եռանկյունը: Կառուցեք մի $A_1B_1C_1$ եռանկյուն, որը նման է ABC եռանկյանը, և մակերեսը կրկնակի անգամ մեծ է ABC եռանկյան մակերեսից:

96. Տրված են a և b երկարությամբ երկու հատված: Կառուցեք $\sqrt{ab}$ երկարությամբ հատվածը:

97. Տրված են երեք հատված, որոնց երկարությունները համապատասխանաբար հավասար են a, b և c: Կառուցեք մի հատված, որի երկարությունը հավասար է $\frac{ab}{c}$:

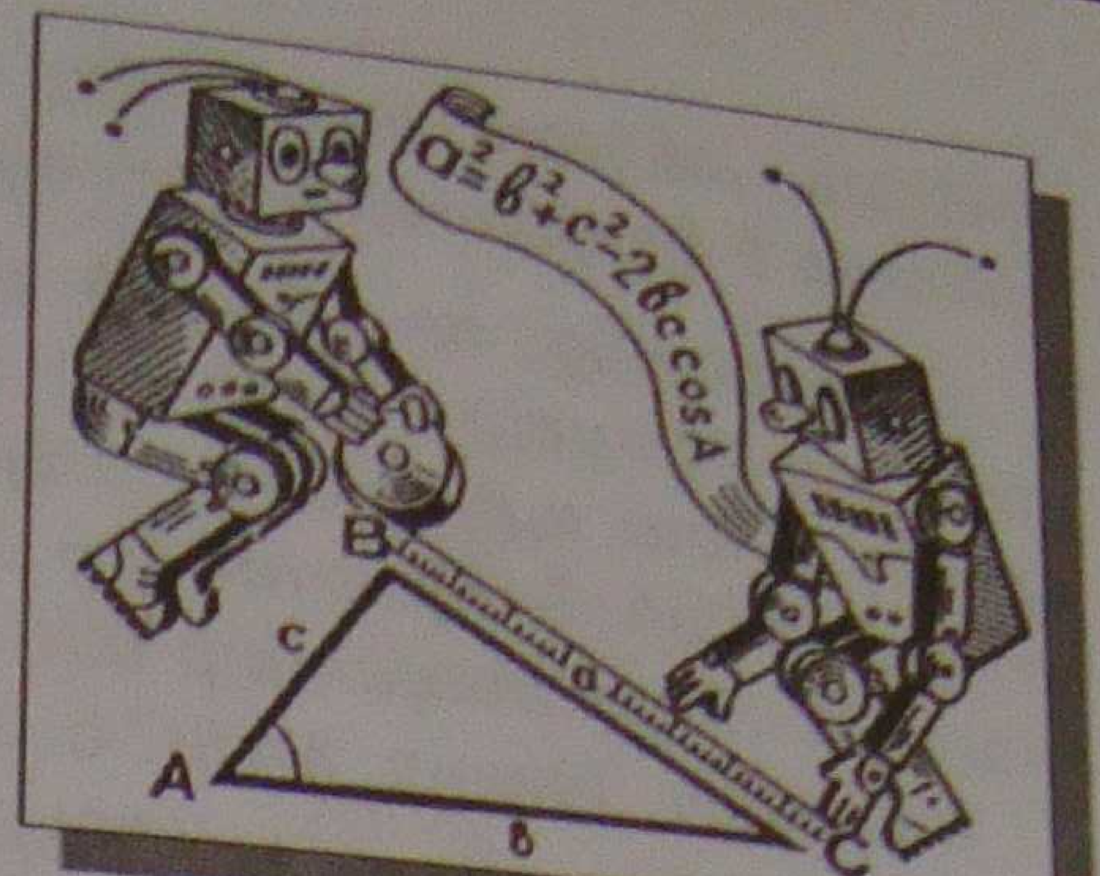
98. Կառուցեք եռանկյունը, եթե տրված են. **ա)** նրա կողմերի միջնակետերը, **բ)** երկու կողմերի միջնակետերը և երրորդ կողմին տարված բարձրության հիմքը, **գ)** մի գագաթից տարված բարձրության հիմքը և մյուս գագաթից տարված միջնագծի ու բարձրության հիմքերը:

99. Կառուցեք եռանկյունը՝ տրված կողմով և մյուս երկու կողմերին տարված միջնագծերով:

100. Կառուցեք երկու հատված, որոնք հարաբերեն ինչպես տրված երկու հատվածների քառակուսիները:

ԳԼՈՒԽ XI

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ



§ 1 ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

(10) **Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյան սինուսը, կոսինուսը և տանգենսը:** Դիտարկենք C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյունը (նկ. 21): Այդ եռանկյան համար BC-ն A անկյան դիմացի էջ է, իսկ AC-ն՝ A անկյանը կից էջ:

Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյան սինուս կոչվում է այդ անկյան դիմացի էջի հարաբերությունը ներքնաձիգին:

Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյան կոսինուս կոչվում է այդ անկյան կից էջի հարաբերությունը ներքնաձիգին:

Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյան տանգենս կոչվում է այդ անկյան դիմացի էջի հարաբերությունը կից էջին:

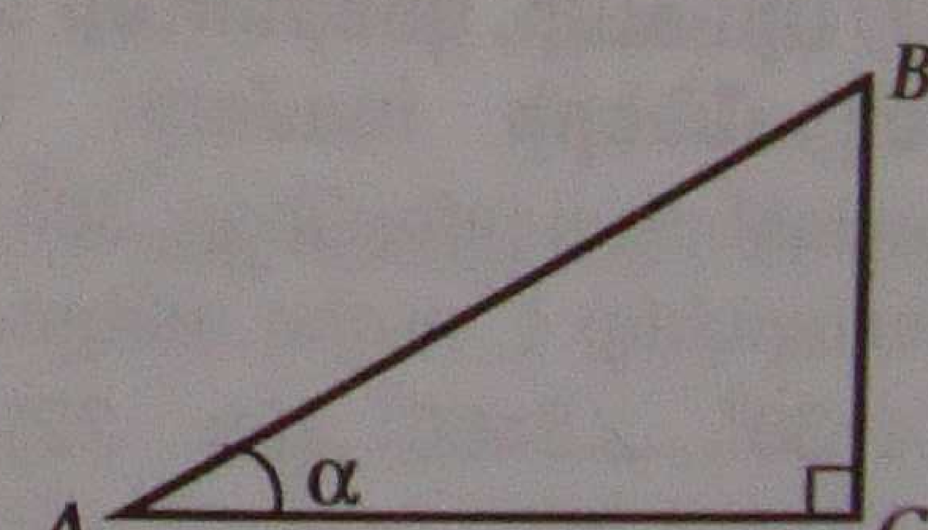
α անկյան սինուսը, կոսինուսը և տանգենսը նշանակվում են $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ պայմանանշաններով (կարդացվում են. «սինուս ալֆա», «կոսինուս ալֆա», «տանգենս ալֆա»):

Նկար 21-ում

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \qquad (1)$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \qquad (2)$$

$$tgA = \frac{BC}{AC}: \qquad (3)$$



Նկ. 21

(1) և (2) բանաձևերից ստացվում է. $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC}$:

Համեմատելով (3) բանաձևի հետ՝ որոշում ենք.

$$tgA = \frac{\sin A}{\cos A}, \qquad (4)$$

այսինքն՝ անկյան տանգենսը հավասար է այդ նույն անկյան սինուսի և կոսինուսի հարաբերությանը:

Ապացուցենք, որ *եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը հավասար է մեկ այլ ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյանը, ապա այդ անկյունների սինուսները հավասար են, այդ անկյունների կոսինուսները հավասար են, այդ անկյունների տանգենսները հավասար են:*

Իսկապես, դիցուք ΔABC-ն և $\Delta A_1B_1C_1$-ը ուղղանկյուն եռանկյուններ են, որոնց ուղիղ անկյուններն են C-ն և C_1-ը, իսկ հավասար սուր անկյուններն են A-ն և A_1-ը: ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները նման են ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի: Ուստի $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$: Այս հավասարություններից հետևում են. $\frac{BC}{AB}=\frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, $\frac{AC}{AB}=\frac{A_1C_1}{A_1B_1}$ և $\frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, այսինքն՝ $sinA=sinA_1$, $cosA=cosA_1$ և $tgA=tgA_1$:

Այժմ ապացուցենք

$$sin^2A+cos^2A=1 \qquad (5)$$

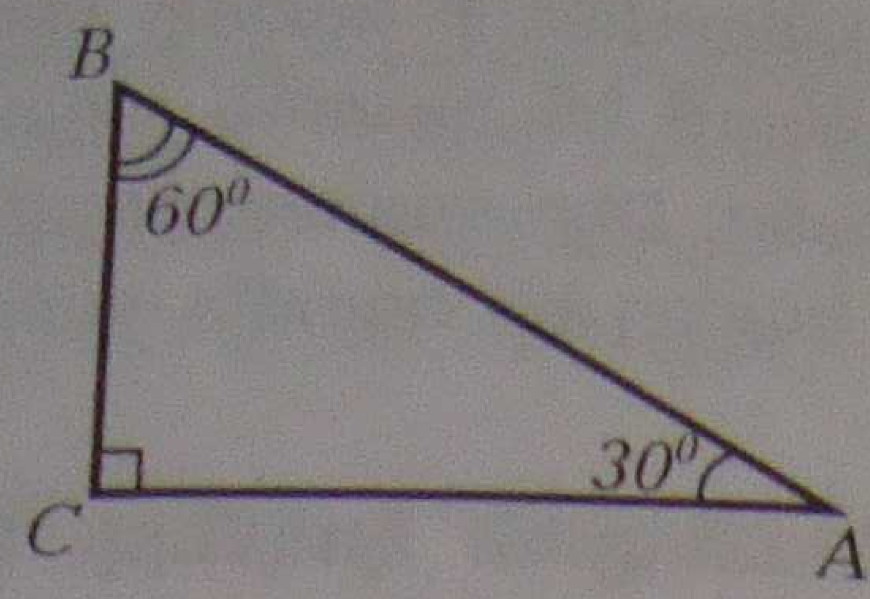
հավասարությունը:

(1) և (2) բանաձևերից ստացվում է.

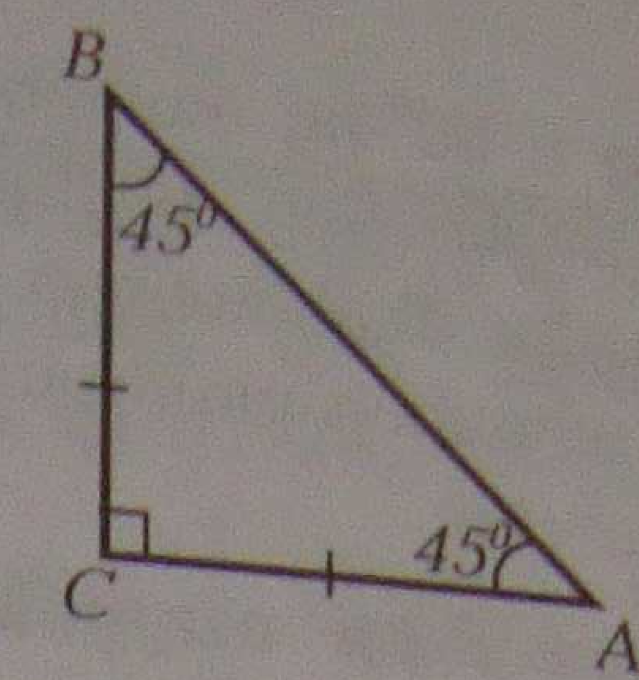
$$sin^2 A+cos^2 A=\frac{BC^2}{AB^2}+\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{BC^2+AC^2}{AB^2}:$$

Ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $BC^2+AC^2=AB^2$, ուրեմն՝ $sin^2A+cos^2A=1$: (5) հավասարությանը անվանում են *եռանկյունաչափական հիմնական նույնություն:*

(11) **Սինուսի, կոսինուսի և տանգենսի արժեքները 30^0, 45^0 և 60^0 անկյունների համար:** Նախ գտնենք սինուսի, կոսինուսի և տանգենսի արժեքները 30^0 և 60^0 անկյունների համար: Դրա համար դիտարկենք C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյունը, որում $\angle A=30^0$, $\angle B=60^0$ (նկ. 22): Քանի որ 30^0-ի անկյան դիմացի էջը հավասար է ներքնաձիգի կեսին, ապա $\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$: Բայց $\frac{BC}{AB}=sin\,A=$ $=sin\,30^0$: Մյուս կողմից՝ $\frac{BC}{AB}=cos\,B=cos\,60^0$: Այսպիսով՝ $\sin 30^0=\frac{1}{2}$, $\cos 60^0=\frac{1}{2}$: Եռանկյունաչափական հիմնական նույնությունից ստանում ենք.



Նկ. 22



Նկ. 23

$$\cos 30^0 = \sqrt{1-\sin^2 30^0} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 60^0 = \sqrt{1-\cos^2 60^0} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}:$$

Ըստ (4) բանաձևի՝ գտնում ենք.

$$tg30^0 = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad tg60^0 = \frac{\sin 60^0}{\cos 60^0} = \sqrt{3}:$$

Այժմ գտնենք $sin45^0$-ը, $cos45^0$-ը և $tg45^0$-ը: Դրա համար դիտարկենք C ուղիղ անկյունով ABC հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյունը (նկ. 23): Այս եռանկյան մեջ $AC=BC$, $\angle A=\angle B=45^0$: Ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $AB^2=AC^2+BC^2=2AC^2=2BC^2$: Այստեղից՝ $AC = BC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$: Հետևաբար՝

$$\sin 45^0 = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45^0 = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$tg45^0 = tgA = \frac{BC}{AC} = 1:$$

Կազմենք $sin\alpha$-ի, $cos\alpha$-ի, $tg\alpha$-ի արժեքների աղյուսակը՝ 30^0, 45^0, 60^0 անկյուններին հավասար α-ի համար:

α	30^0	45^0	60^0
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

30^0-ից, 45^0-ից և 60^0-ից տարբեր սուր անկյունների համար սինուսի, կոսինուսի և տանգենսի արժեքները գտնում են հատուկ աղյուսակների կամ հաշվիչ մեքենաների օգնությամբ: Ձեր դասագրքի վերջում բերված է մի այդպիսի աղյուսակ, որից կարող եք օգտվել զանազան խնդիրներ լուծելիս:

(12) Առնչություններ ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև: Գրառումները պարզեցնելու նպատակով՝ C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյան կողմերը նշանակենք փոքրատառերով (տե՛ս նկ. 21). $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$:

Օգտվենք (1) և (2) բանաձևերից. $\frac{a}{c}=\sin A$, $\frac{b}{c}=\cos A$, որտեղից ստանում ենք. $a=c\sin A$, $b=c\cos A$: Նույն կերպ ստանում ենք. $a=c\cos B$, $b=c\sin B$:

Այսպիսով՝ *ուղղանկյուն եռանկյան էջը հավասար է ներքնաձիգին՝ բազմապատկած այդ էջի դիմացի անկյան սինուսով կամ այդ էջին կից անկյան կոսինուսով:*

Օգտվենք (3) բանաձևից. $\frac{a}{b}=tgA$, որտեղից ստանում ենք $a=b\,tgA$: Նույն կերպ ստանում ենք $b=a\,tgB$:

Այսինքն՝ *ուղղանկյուն եռանկյան էջը հավասար է մյուս էջին՝ բազմապատկած առաջին էջի դիմացի անկյան տանգենսով:*

Նշված առնչությունները թույլ են տալիս լուծել ուղղանկյուն եռանկյունները, այսինքն՝ ուղղանկյուն եռանկյան մի քանի հայտնի տարրերի միջոցով գտնել մյուս տարրերը: Բերենք մի օրինակ:

Խ ն դ ի ր : Ուղղանկյուն եռանկյան մեջ հայտնի են էջը՝ $a=12$, և այդ էջին կից անկյունը՝ $B=36^0$: Գտնել եռանկյան անհայտ էջը, ներքնաձիգը և անկյունը:

Լ ու ծ ու մ : $b=a\,tgB=12\cdot tg36^0$: $a=c\cos B$, որտեղից՝ $c=\frac{a}{\cos B}=\frac{12}{\cos 36^0}$: Անհրաժեշտության դեպքում, հատկապես գործնական խնդիրներ լուծելիս, աղյուսակից կարող ենք գտնել $tg36^0$-ը և $\cos36^0$-ը: Սակայն մենք այստեղ կբավարարվենք $tg36^0$ և $\cos36^0$ գրառումներով, հաշվի առնելով, որ դրանք որոշակի թվեր են: $\angle A=90^0-\angle B=90^0-36^0=54^0$:

101. Գտեք C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյան A և B անկյունների սինուսը, կոսինուսը և տանգենսը, եթե. **ա)**$BC=8$, $AB=17$, **բ)**$BC=21$, $AC=20$, **գ)**$BC=1$, $AC=2$, **դ)**$AC=24$, $AB=25$:

102. Կառուցեք α անկյունը, եթե. **ա)** $tg\alpha=\frac{1}{2}$, **բ)** $tg\alpha=\frac{3}{4}$, **գ)**$cos\alpha=0{,}2$, **դ)** $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, **ե)** $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, **զ)**$sin\alpha=0{,}4$:

103. Գտեք. **ա)**$sin\alpha$-ն և $tg\alpha$-ն, եթե $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, **բ)**$sin\alpha$-ն և $tg\alpha$-ն, եթե $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, **գ)**$cos\alpha$-ն և $tg\alpha$-ն, եթե $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, **դ)**$cos\alpha$-ն և $tg\alpha$-ն, եթե $\sin\alpha=\frac{1}{4}$:

104. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերից մեկը հավասար է b, իսկ նրա դիմացի անկյունը՝ β: **ա)**b-ի և β-ի միջոցով արտահայտեք ներքնաձիգը, մյուս էջը և դրա դիմացի անկյունը, **բ)**գտեք դրանց արժեքները, եթե b=10սմ, $\beta=50^0$:

105. Կամայական ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյան սինուսի արժեքը փոքր է 1-ից: Բացատրեք, թե ինչու:

106. Կարող է 1-ից մեծ արժեք ունենալ ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյան՝ **ա)**կոսինուսը, **բ)**տանգենսը: Պատասխանը հիմնավորեք:

107. Ապացուցեք, որ եթե C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյան մեջ $\angle A<\angle B$, ապա. **ա)**$sinA<sinB$, **բ)**$cosA>cosB$, **գ)**$tgA<tgB$:

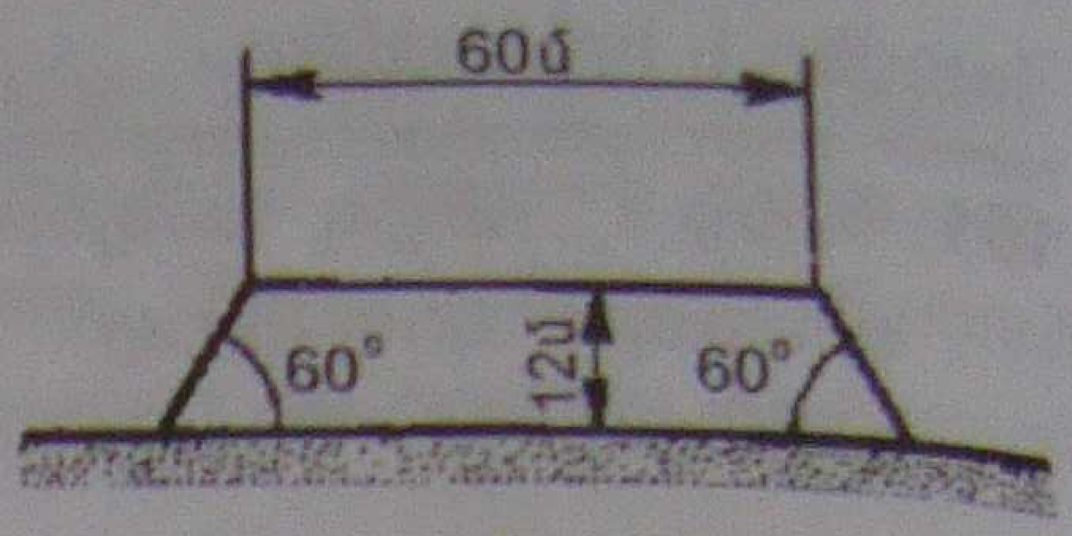
108. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը հավասար է c, իսկ սուր անկյուններից մեկը՝ α: Մյուս սուր անկյունը և էջերը արտահայտեք c-ով և α-ով: Գտեք դրանց արժեքը, եթե c=24սմ և $\alpha=35^0$:

109. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունը հավասար է α, իսկ հիմքը՝ b: Գտեք այդ եռանկյան **ա)**սրունքը, **բ)**հիմքին իջեցրած բարձրությունը:

110. Զուգահեռագծի փոքր կողմը հավասար է b, իսկ սուր անկյունը՝ α: Գտեք զուգահեռագծի մեծ հիմքին տարած բարձրությունը:

111. Հավասարասրուն սեղանի հիմքերը հավասար են 2սմ և 6սմ, իսկ մեծ հիմքին առընթեր անկյունը հավասար է α: Գտեք սեղանի բարձրությունը և սրունքը:

112. Խճուղու լիցքը վերին մասում ունի 60մ լայնություն: Որքա՞ն է նրա լայնությունը ստորին մասում, եթե լանջերի թեքությունը հորիզոնի նկատմամբ 60^0 է, իսկ լիցքի բարձրությունը՝ 12մ (նկ. 24):



Նկ. 24

113. Գտեք շեղանկյան անկյունները, եթե նրա անկյունագծերը հավասար են $2\sqrt{3}$ սմ և 2սմ:

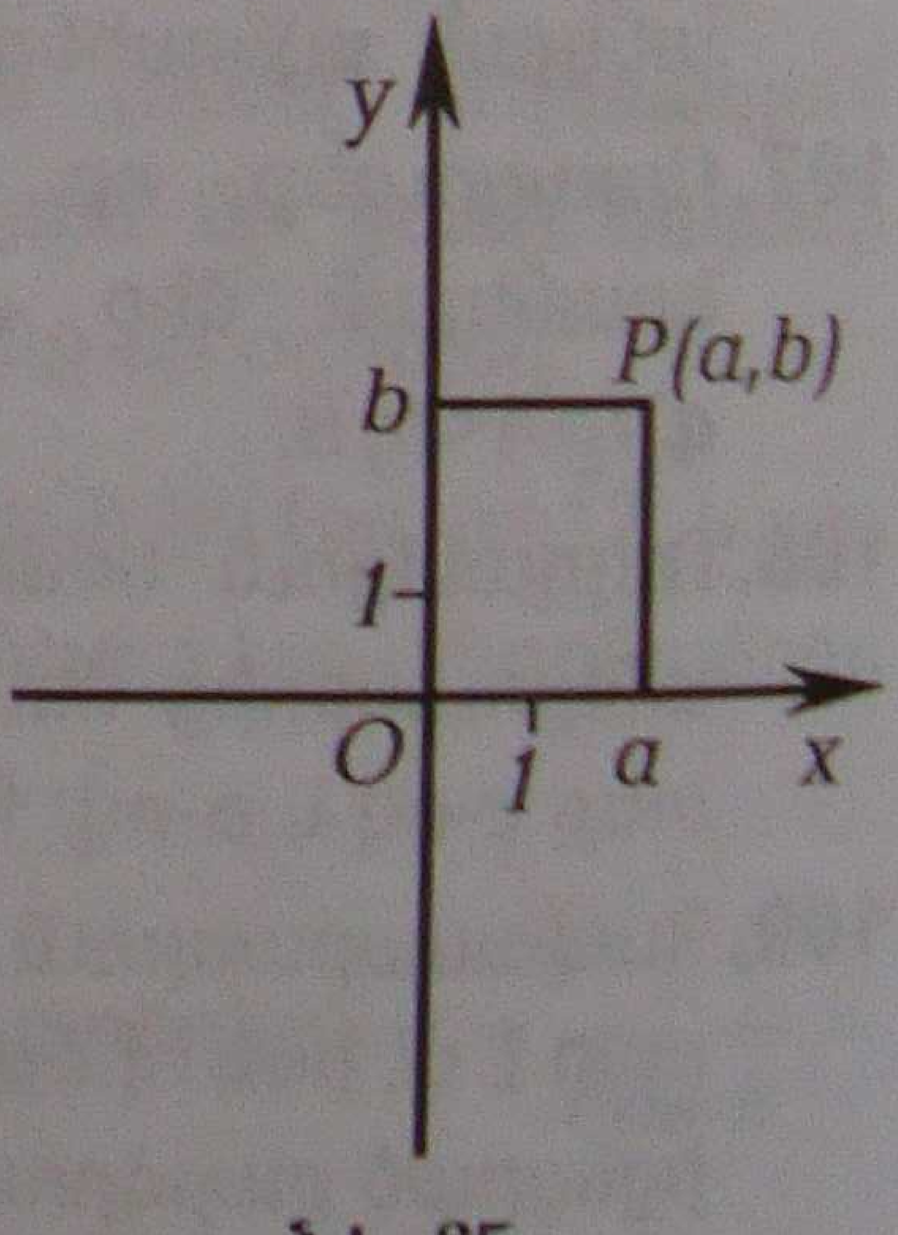
114. Ուղղանկյան կողմերը հավասար են 3սմ և $\sqrt{3}$ սմ: Գտեք ուղղանկյան անկյունագծի կազմած անկյունները կողմերի հետ:

115. $ABCD$ զուգահեռագծի AD կողմը 12սմ է, իսկ BAD անկյունը՝ 48^0: Գտեք զուգահեռագծի մակերեսը, եթե նրա BD անկյունագիծը ուղղահայաց է AB կողմին:

116. Ուղղանկյան անկյունագծերի կազմած անկյուններից մեկը հավասար է 68^0: Գտեք ուղղանկյան կողմերը, եթե նրա անկյունագիծը հավասար է 60սմ:

§ 2 ԿՈՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ

(13) **Կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ:** Կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգի հասկացությունը մեզ հայտնի է հանրահաշվի դասընթացից: Հիշենք, որ կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ ներմուծելու համար հարկավոր է տանել երկու փոխուղղահայաց ուղիղներ, նրանցից յուրաքանչյուրի վրա ընտրել ուղղություն (այն նշանակվում է սլաքով) և ընտրել հատվածների չափման միավոր կամ մասշտաբի միավոր (նկ. 25): Մենք գիտենք, որ հարթության յուրաքանչյուր կետ բնութագրվում է երկու կոորդինատով՝ աբսցիսով և օրդինատով: Կետի աբսցիսը և օրդինատը գտնելու համար այդ կետից իջեցնում ենք ուղղահայացներ, համապատասխանաբար, Ox առանցքին և Oy առանցքին (կամ, որ նույնն է, տանում ենք զուգահեռներ Oy առանցքին և Ox առանցքին):



Նկ. 25

Գիտենք, որ կոորդինատային յուրաքանչյուր առանցք հարթությունը տրոհում է երկու *կիսահարթության*, իսկ երկու առանցքը՝ չորս *քառորդի:* Քառորդներից յուրաքանչյուրում տարբեր կետերն ունեն միևնույն նշանով կոորդինատներ:

Այստեղ կարևոր է կատարել երկու դիտողություն:

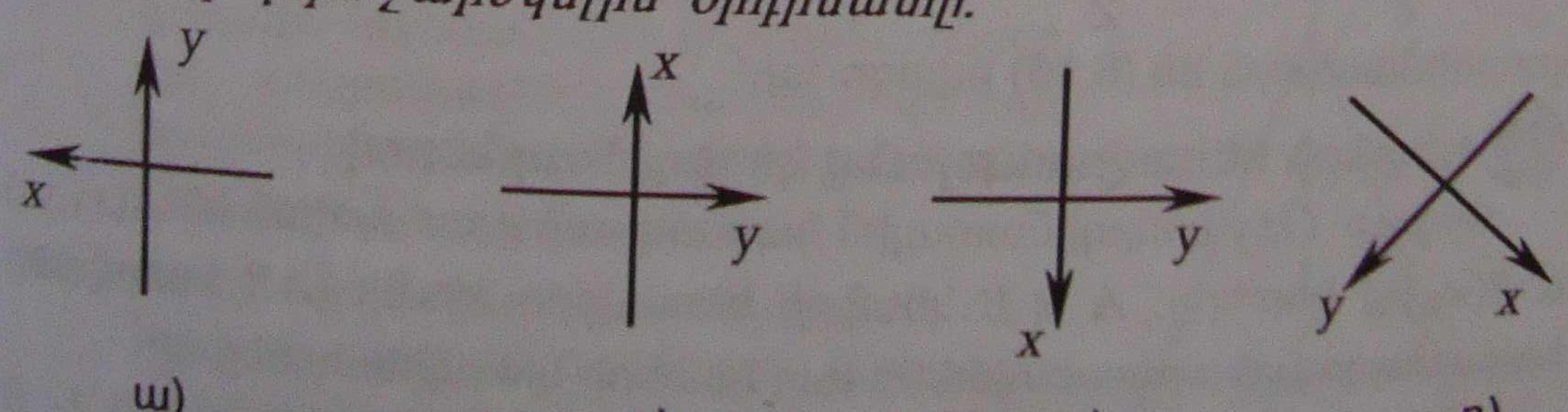
1.Կոորդինատային առանցքների վրա մենք ընտրում ենք համապատասխան մասշտաբի միավոր: Հասկանալի է, որ մասշտաբն ընտրում ենք մենք, սակայն անհրաժեշտ է նշել, որ այդ մասշտաբն ընտրելիս պահանջվում է ուշադրություն դարձնել որոշ հանգամանքների վրա: Դիտողություններից մեկը վերաբերում է հենց մասշտաբի ընտրությանը:

Հանրահաշվում կոորդինատային առանցքներից յուրաքանչյուրի համար, կախված մեծությունների բնույթից, կարող ենք ընտրել տարբեր մասշտաբներ: Օրինակ, եթե ուզում ենք գրաֆիկորեն պատկերել հացահատիկի գնի և զանգվածի համեմատականությունը, ապա չափման միավորները տարասեռ են (դրամ և կիլոգրամ): Ուստի՝ նրանց համար կարող ենք ընտրել տարբեր մասշտաբներ, և դա համեմատականության պատկերման համար կարևոր դեր չի ունենա: Մինչդեռ, երկրաչափության մեջ, եթե Ox և Oy առանցքների համար ընտրված մասշտաբները տարբեր լինեն, ապա դժվար չէ համոզվել, որ պատկերը կձևափոխվի: Օրինակ՝ քառակուսին կպատկերվի ուղղանկյան տեսքով (եթե կողմերը վերցվեն առանցքներին զուգահեռ): Այդ դեպքում, կախված պատկերի դիրքից, կխախտվեն անկյունները, կետերի հեռավորությունները և այլն:

Այսպիսով՝ *երկրաչափական խնդիրներ լուծելիս կոորդինատային երկու առանցքների համար ընտրում ենք հենց նույն մասշտաբի միավորը:*

2.Երկրորդ դիտողությունը վերաբերում է կոորդինատային առանցքների ուղղություններին: Անշուշտ, մենք կարող ենք թղթի վրա առանցքների ուղղությունները պատկերել տարբեր կերպ, օրինակ՝ ինչպես ցույց է տրված նկ. 26-ում:

Այս նկարներում որևէ տրամաբանական սխալ չկա: Սակայն մեր գործը էապես կհեշտանա, եթե հենց սկզբից պայմանավորվենք, որ *հորիզոնական ուղղությամբ պատկերենք աբսցիսների (Ox) առանցքը, իսկ ուղղահայաց ուղղությամբ՝ օրդինատների (Oy) առանցքը, ընդ որում՝ դեպի աջ շարժվելիս մեծանա աբսցիսը, իսկ դեպի վեր. շարժվելիս՝ օրդինատը:*

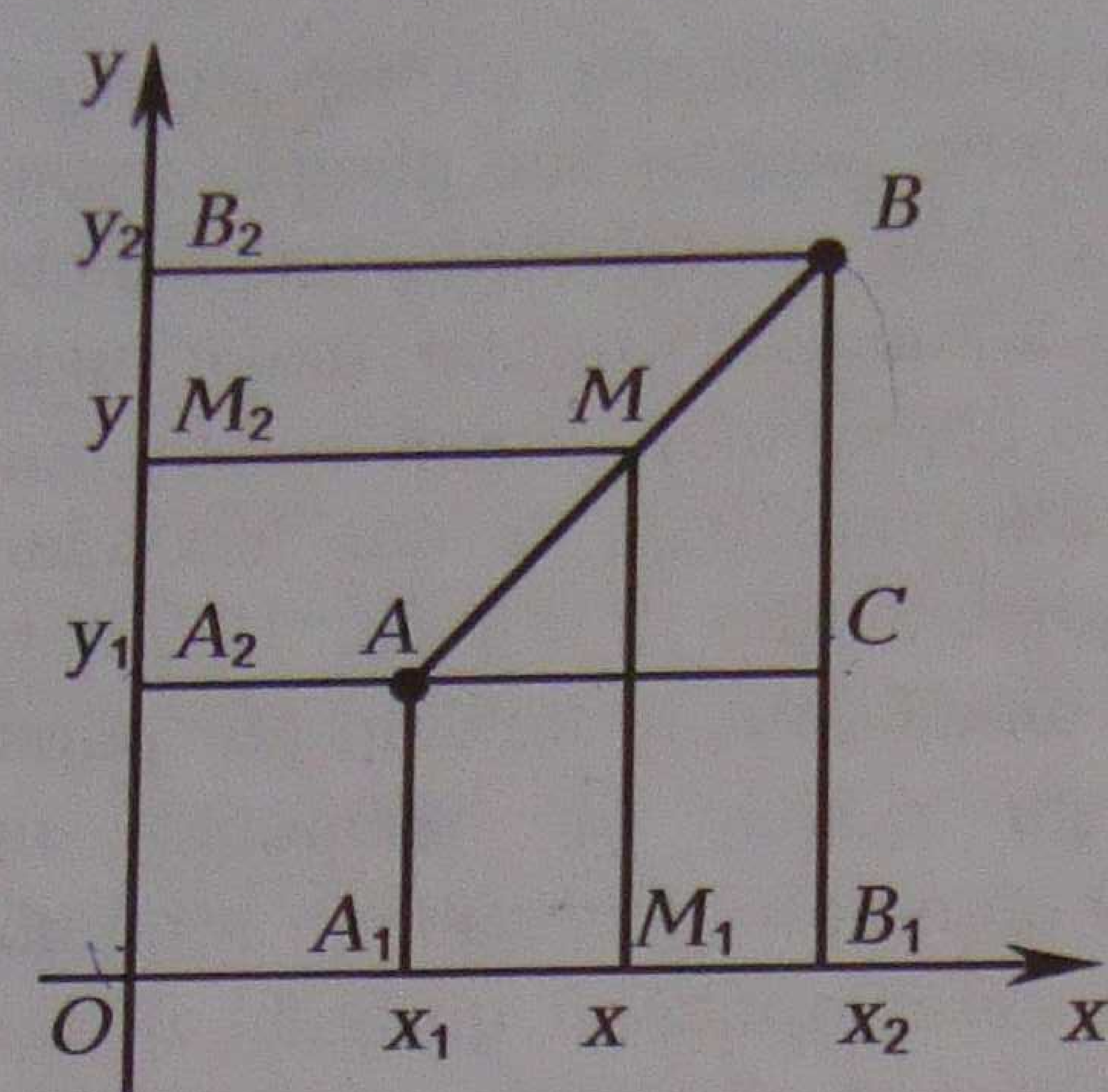


ա) բ) գ) դ)

Նկ. 26

14 Հատվածի միջնակետի կոորդինատները: Դիցուք կոորդինատների Oxy համակարգում AB հատվածը տրված է իր ծայրակետերի կոորդինատներով՝ $A(x_1,y_1)$ և $B(x_2,y_2)$: Պահանջվում է գտնել AB հատվածի M միջնակետի x և y կոորդինատները:

Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ AB-ն զուգահեռ չէ Oy առանցքին, այսինքն՝ $x_1 \neq x_2$: A, M և B կետերով տանենք Ox-ին ուղղահայացներ (նկ. 27): Դրանք առանցքին կհատվեն $A_1(x_1,0)$, $M_1(x,0)$ և B_1 $(x_2,0)$ կետերում: Ըստ Թալեսի թեորեմի M_1 կետը A_1B_1 հատվածի միջնակետն է, այսինքն՝ $A_1M_1=M_1B_1$: Ուստի՝ ըստ կոորդինատային առանցքի վրա թվերի պատկերման, $|x-x_1|=|x-x_2|$: Հնարավոր է երկու դեպք. $x-x_1=x-x_2$ կամ $x-x_1=-(x-x_2)$: Առաջին դեպքը անհնար է, քանի որ $x_1 \neq x_2$: Ուրեմն՝ տեղի ունի երկրորդը: Ստացվում է



Նկ. 27

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}: \qquad (1)$$

Եթե AB հատվածը զուգահեռ է Oy առանցքին, այսինքն $x_1=x_2$, ապա A_1, M_1, B_1 կետերն ունեն նույն աբսցիսը. $x_1=x=x_2$: Իսկ դա նշանակում է, որ (1) բանաձևը ճիշտ է նաև այդ դեպքում:

Նույն կերպ ստացվում է, որ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$: (2)

Խ ն դ ի ր: ON հատվածի միջնակետը $M(3,8)$ կետն է: Գտնել N կետի կոորդինատները:

Լ ու ծ ու մ: O սկզբնակետի կոորդինատներն են $x_1=0$, $y_1=0$: (1) և (2) բանաձևերի մեջ տեղադրենք $x=3$ և $y=8$, ստանում ենք. $3 = \frac{0 + x_2}{2}$, $8 = \frac{0 + y_2}{2}$, որտեղից՝ $x_2=6$, $y_2=16$: Այսպիսով, N կետի կոորդինատներն են (6,16) թվազույգը:

15 Կետերի հեռավորությունը կոորդինատներով:

Դիցուք Oxy կոորդինատային հարթության վրա տրված են $A(x_1,y_1)$ և $B(x_2,y_2)$ կետերը: A և B կետերի հեռավորությունը (AB հատվածի երկարությունը) արտահայտենք այդ կետերի կոորդինատներով:

Քննության առնենք նախ այն դեպքը, երբ $x_1 \neq x_2$ և $y_1 \neq y_2$: A և B կետերով տանենք կոորդինատային առանցքներին զուգահեռ ուղիղ-

ներ: Առաջանում է ACB ուղղանկյուն եռանկյունը (տե՛ս նկ. 27): Որոշենք էջերի երկարությունները. $AC = A_1B_1 = |x_2 - x_1|$, $BC = B_2A_2 = |y_2 - y_1|$: Այժմ օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից ստանում ենք AB ներքնաձիգի d_{AB} երկարությունը.

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} : \qquad (3)$$

Եթե ընդունենք, որ $x_1=x_2$ կամ $y_1=y_2$, ապա հեշտ է համոզվել, որ (3) բանաձևը ճիշտ է նաև այդ դեպքում: Իրոք, եթե, ասենք, $x_1=x_2$ և $y_1 \neq y_2$, ապա $d_{AB} = |y_2 - y_1|$, բայց նույն արդյունքին է հանգեցնում նաև (3) բանաձևը: Մասնավորապես, եթե A և B կետերը համընկնում են, այսինքն $x_1=x_2$ և $y_1=y_2$, ապա $d_{AB}=0$:

Խ ն դ ի ր : Գտնել ABC եռանկյան AM միջնագծի երկարությունը, եթե տրված են եռանկյան գագաթները՝ $A(1,2)$, $B(7,3)$ և $C(1,9)$:

Լ ու ծ ու մ : Նախ գտնենք BC կողմի M միջնակետի x_0 և y_0 կոորդինատները: Օգտվելով (1) և (2) բանաձևերից՝ ստանում ենք. $x_0 = \dfrac{7+1}{2} = 4$, $y_0 = \dfrac{3+9}{2} = 6$: Այժմ գտնենք $A(1,2)$ և $M(4,6)$ կետերի հեռավորությունը՝ օգտվելով (3) բանաձևից.

$$d_{AM} = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5 :$$

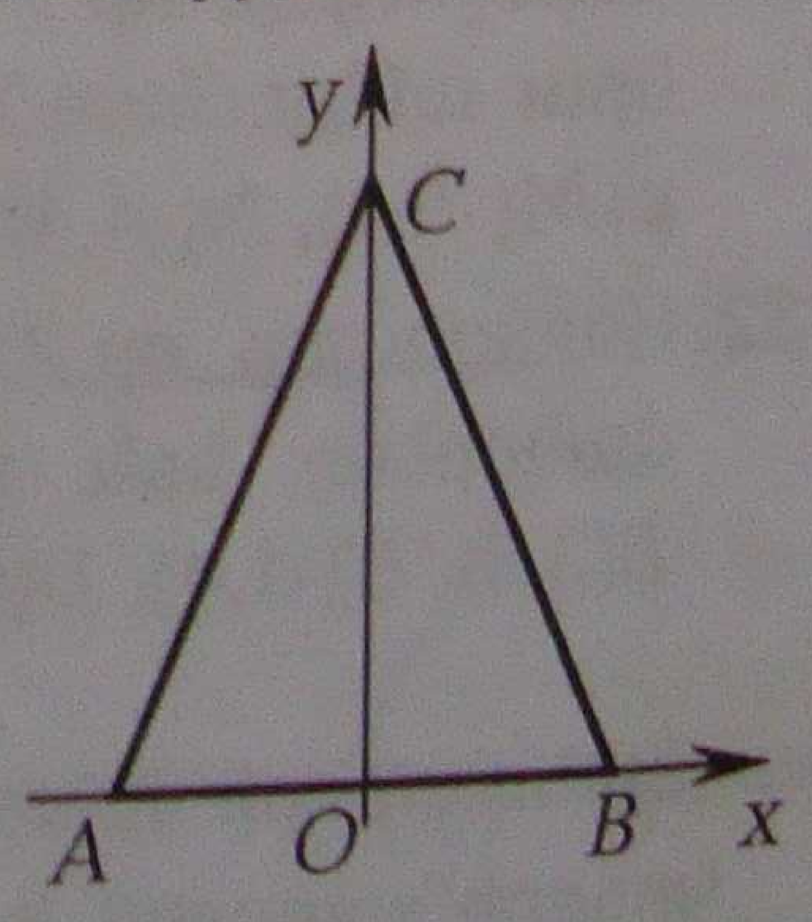
Խնդիրներ

117. A կետը գտնվում է Ox դրական կիսառանցքի, իսկ B կետը՝ Oy դրական կիսառանցքի վրա: Գտեք ABO եռանկյան գագաթների կոորդինատները, եթե. **ա)** $OA=5$, $OB=3$, **բ)** $OA=a$, $OB=b$:

118. A կետը գտնվում է Ox դրական կիսառանցքի, իսկ B կետը՝ Oy դրական կիսառանցքի վրա: Գտեք $OACB$ ուղղանկյան գագաթների կոորդինատները, եթե. **ա)** $OA=6{,}5$, $OB=3$, **բ)** $OA=a$, $OB=b$:

119. $MNPQ$ քառակուսին գծեք այնպես, որ P գագաթն ունենա (-3,3) կոորդինատները, իսկ անկյունագծերը հատվեն կոորդինատների սկզբնակետում: Գտեք M, N և Q կետերի կոորդինատները:

120. Գտեք նկար 28-ում պատկերված ABC հավասարասրուն եռանկյան գագաթների կոորդինատները, եթե $AB=2a$, իսկ CO բարձրությունը հավասար է h:



Նկ. 28

121. Գտեք $ABCD$ զուգահեռագծի D գագաթի կոորդինատները, եթե $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(12,-3)$:

122. Աղյուսակն արտագծեք տետրի մեջ և, օգտվելով AB հատվածի M միջնակետի կոորդինատները հաշվելու բանաձևերից, լրացրեք դատարկ վանդակները.

A	(2,-3)		(0,1)	(0,0)	(c,d)	(3,5)	$(3t+5,7)$	(1,3)
B	(-3,1)	(4,7)		(-3,7)		(3,8)	$(t+7,-7)$	
M		(-3,-2)	(3,-5)		(a,b)			(0,0)

123. Տրված են $A(0,1)$ և $B(5,-3)$ կետերը: Գտեք C և D կետերի կոորդինատները, եթե հայտնի է, որ B կետը AC հատվածի միջնակետն է, իսկ D կետը՝ BC հատվածի միջնակետը:

124. Գտեք $M(3,-2)$ կետի հեռավորությունը. **ա)** աբսցիսների առանցքից, **բ)** օրդինատների առանցքից, **գ)** կոորդինատների սկզբնակետից:

125. Գտեք A և B կետերի հեռավորությունը, եթե. **ա)** $A(2,7)$, $B(-2,7)$, **բ)** $A(-5,1)$, $B(-5,-7)$, **գ)** $A(-3,0)$, $B(0,4)$, **դ)** $A(0,3)$, $B(-4,0)$:

126. Գտեք MNP եռանկյան պարագիծը, եթե $M(4,0)$, $N(12,-2)$, $P(5,-9)$:

127. Գտեք x-ը, եթե. **ա)** $A(2,3)$ և $B(x,1)$ կետերի հեռավորությունը հավասար է 2, **բ)** $M_1(-1,x)$ և $M_2(2x,3)$ կետերի հեռավորությունը հավասար է 7:

128. Ապացուցեք, որ ABC եռանկյունը հավասարասրուն է, եթե նրա գագաթներն ունեն հետևյալ կոորդինատները. **ա)** $A(0,1)$, $B(1,-4)$, $C(5,2)$, **բ)** $A(-4,1)$, $B(-2,4)$, $C(0,1)$:

129. Օրդինատների առանցքի վրա գտեք այնպիսի կետ, որը հավասարահեռ լինի հետևյալ կետերից. **ա)** $A(-3,5)$ և $B(6,4)$, **բ)** $C(4,-3)$ և $D(8,1)$:

130. Աբսցիսների առանցքի վրա գտեք այնպիսի կետ, որը հավասարահեռ լինի հետևյալ կետերից. **ա)** $A(1,2)$ և $B(-3,4)$, **բ)** $C(1,1)$ և $D(3,5)$:

131. Ապացուցեք, որ $MNPQ$ քառանկյունը զուգահեռագիծ է, և գտեք նրա անկյունագծերը, եթե. **ա)** $M(1,1)$, $N(6,1)$, $P(7,4)$, $Q(2,4)$, **բ)** $M(-5,1)$, $N(-4,4)$, $P(-1,5)$, $Q(-2,2)$:

132. Ապացուցեք, որ $ABCD$ քառանկյո նն ուղղանկյուն է, և գտեք նրա մակերեսը, եթե. **ա)** $A(-3,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,-3)$, $D(-3,-3)$, **բ)** $A(4,1)$, $B(3,5)$, $C(-1,4)$, $D(0,0)$:

Կոորդինատների մեթոդի կիրառությունը խնդիրներ լուծելիս:

Կոորդինատային համակարգի ներմուծման միջոցով հնարավոր է դառնում երկրաչափական խնդիրը արտահայտել հանրահաշվի լեզ-

վով, և այն լուծել հանրահաշվի բանաձևերի կիրառությամբ: Մասնավորապես, հատվածի միջնակետի կոորդինատների և երկու կետերի հեռավորության բանաձևերը կարելի է օգտագործել երկրաչափական ավելի բարդ խնդիրներ լուծելիս: Դրա համար անհրաժեշտ է ներմուծել կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ և խնդրի պայմանը գրել կոորդինատներով: Դրանից հետո խնդիրը լուծվում է հանրահաշվական հաշվումներով:

133. *Ապացուցել, որ ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի միջնակետը հավասարահեռ է նրա բոլոր գագաթներից:*

Լուծում: Դիտարկենք C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյունը: M տառով նշանակենք BC ներքնաձիգի միջնակետը: Ներմուծենք կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ, ինչպես ցույց է տրված նկար 29-ում: Եթե $BC=a$, $AC=b$, ապա եռանկյան գագաթներն ունեն հետևյալ կոորդինատները. $C(0,0)$, $B(a,0)$, $A(0,b)$: Ըստ հատվածի միջնակետի կոորդինատների հաշվման բանաձևի՝ գտնում ենք M կետի կոորդինատները՝ $M\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$:

Գտնենք MC և MA հատվածների երկարությունները՝ օգտվելով երկու կետերի հեռավորության բանաձևից.

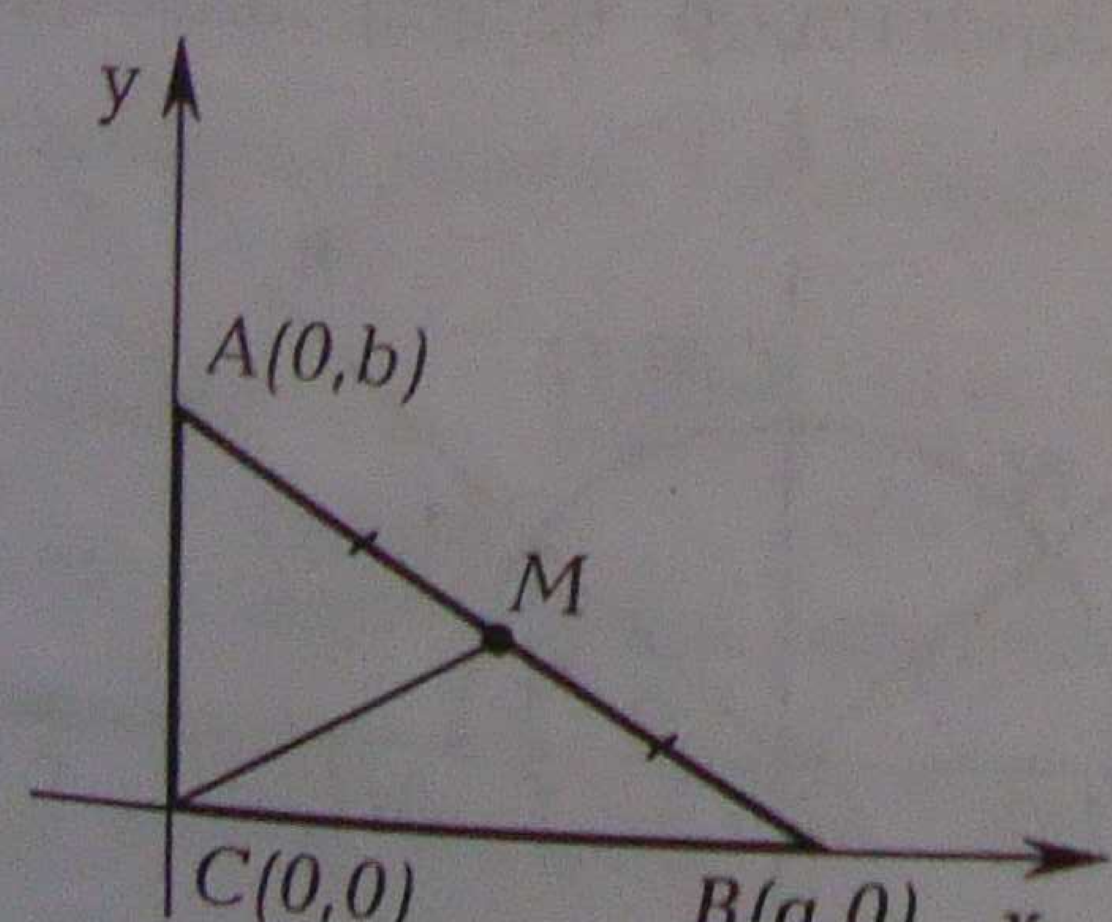
$$MC=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$MA=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-b\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}:$$

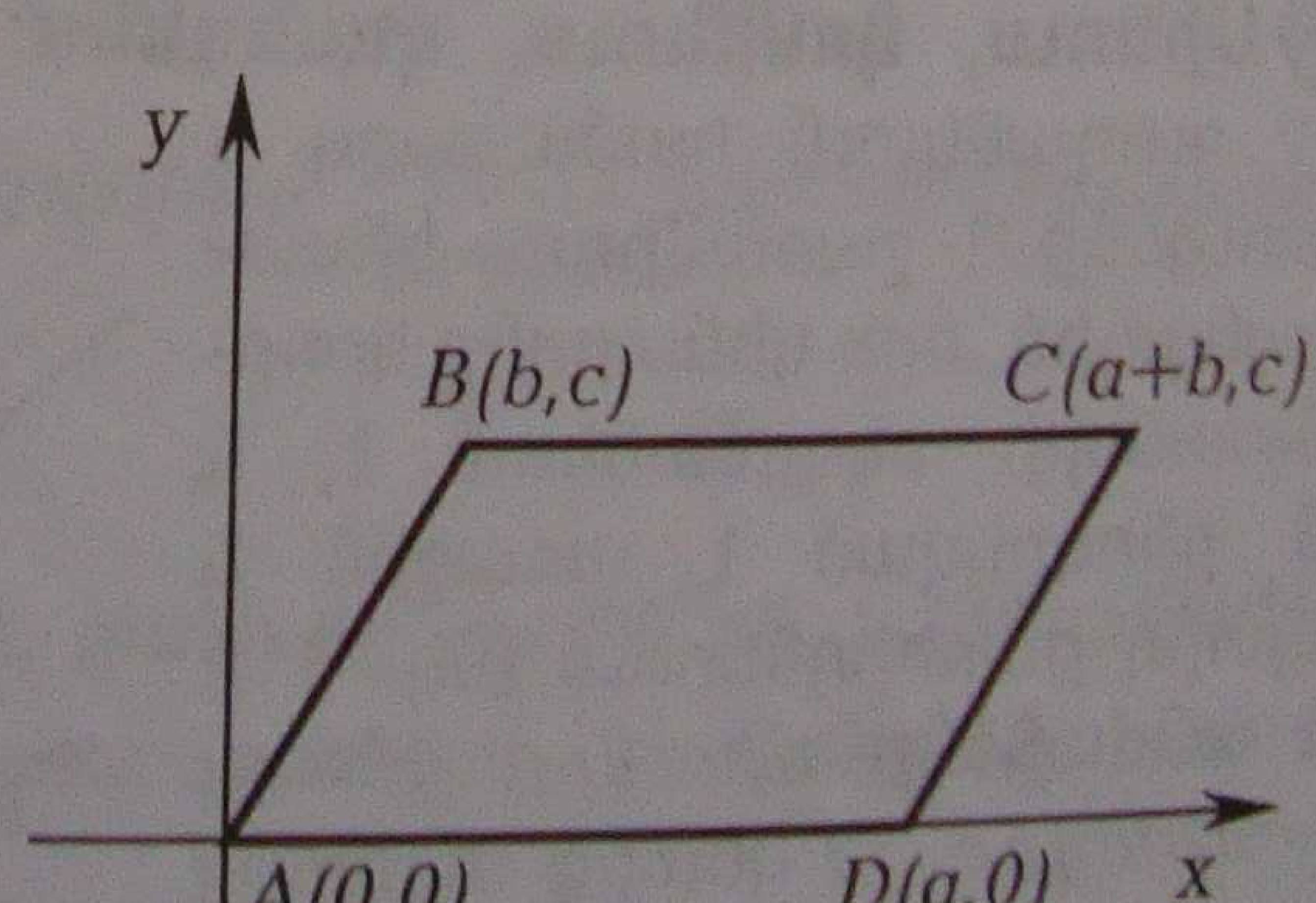
Այսպիսով՝ $MA=MB=MC$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

134. *Ապացուցել, որ զուգահեռագծի բոլոր կողմերի քառակուսիների գումարը հավասար է անկյունագծերի քառակուսիների գումարին:*

Լուծում: Դիցուք $ABCD$-ն տրված զուգահեռագիծն է:



Նկ. 29



Նկ. 30

կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգը ներմուծենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկար 30-ում: Եթե $AD=BC=a$, իսկ B կետի կոորդինատներն են (b,c), ապա D կետը կունենա $(a,0)$, իսկ C կետը՝ $(a+b,c)$ կոորդինատները: Օգտագործելով երկու կետերի հեռավորության բանաձևը՝ ստանում ենք.

$$AB^2=b^2+c^2,\ AD^2=a^2,\ AC^2=(a+b)^2+c^2,\ BD^2=(a-b)^2+c^2:$$

Այստեղից ստացվում է.

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2(AB^2+AD^2)=2(a^2+b^2+c^2),$$

$$AC^2+BD^2=(a+b)^2+c^2+(a-b)^2+c^2=2(a^2+b^2+c^2):$$

Այսպիսով՝ $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

135. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարած միջնագիծը հավասար է 160սմ, իսկ եռանկյան հիմքը՝ 80սմ: Գտեք այդ եռանկյան մյուս երկու միջնագծերը:

136. Եռանկյան՝ 10սմ-ի հավասար բարձրությունը հիմքը տրոհում է երկու հատվածի, որոնք հավասար են 10սմ և 4սմ: Գտեք մյուս երկու կողմերից փոքրին տարված միջնագիծը:

137. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն սեղանի անկյունագծերը հավասար են: Ձևակերպեք և ապացուցեք հակադարձ պնդումը:

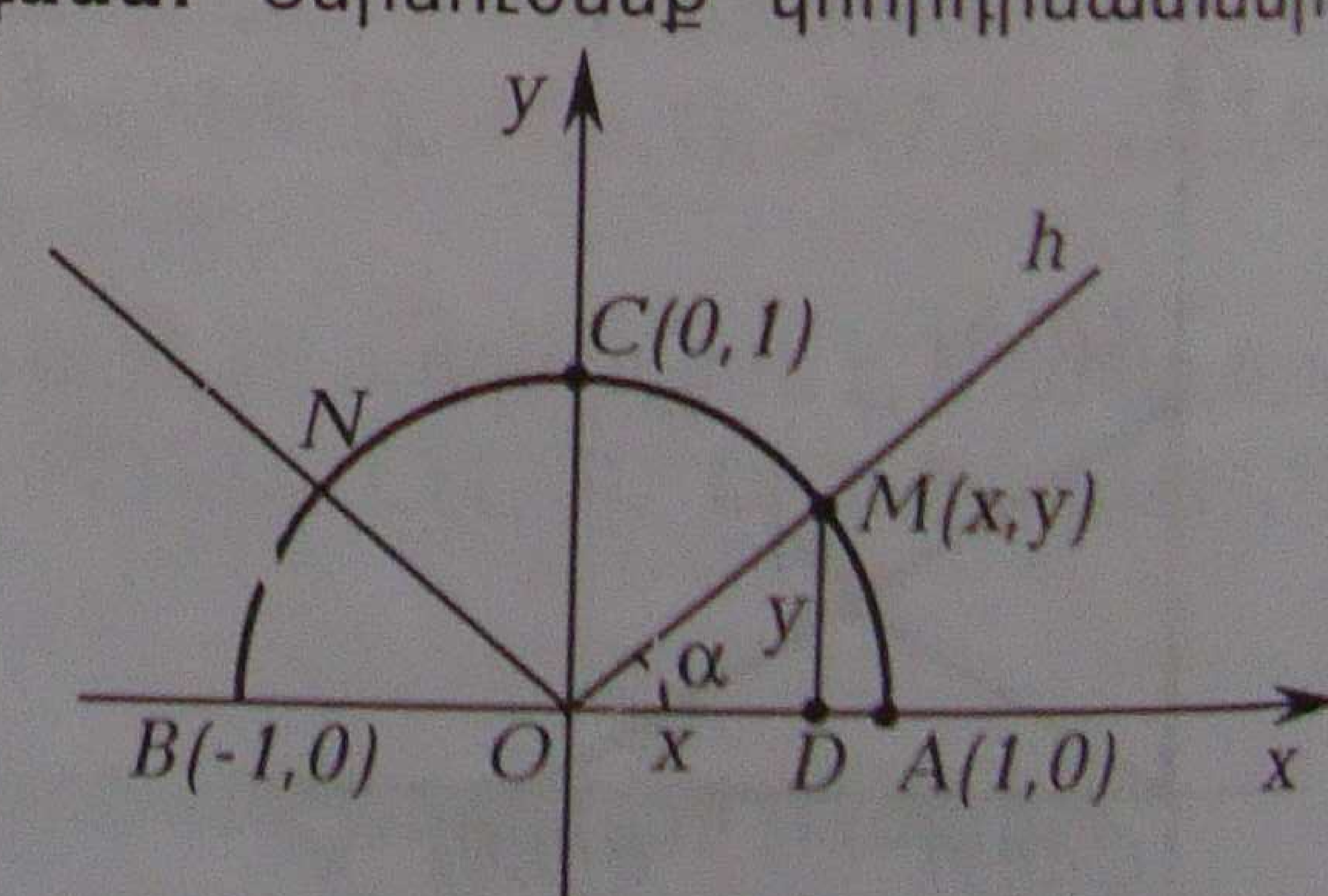
138. Ապացուցեք, որ ուղղանկյան անկյունագծերը հավասար են:

139. Ապացուցեք, որ եթե զուգահեռագծի անկյունագծերը հավասար են, ապա այդ զուգահեռագիծը ուղղանկյուն է:

140. Տրված է $ABCD$ ուղղանկյունը: Ապացուցեք, որ հարթության կամայական M կետի համար տեղի ունի $AM^2+CM^2=BM^2+DM^2$ հավասարությունը:

§ 3 ԱՆԿՅԱՆ ՍԻՆՈՒՍԸ, ԿՈՍԻՆՈՒՍԸ ԵՎ ՏԱՆԳԵՆՍԸ

16 Սինուս, կոսինուս, տանգենս: Ներմուծենք կոորդինատների Oxy ուղղանկյուն համակարգ և կառուցենք 1 շառավիղով կիսաշրջանագիծ, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է, և որն ընդգրկված է առաջին և երկրորդ քառորդներում (նկ. 31): Այն անվանենք *միավոր կիսաշրջանագիծ*: O կետից տանենք h ճառագայթը, որը $M(x,y)$ կետում հատում է միավոր կիսա-



Նկ. 31

շրջանագիծը: α տառով նշանակենք h ճառագայթի և աբսցիսների դրական կիսառանցքի կազմած անկյունը (եթե h ճառագայթը և աբսցիսների դրական կիսառանցքը համընկնում են, ապա կհամարենք, որ $\alpha=0^0$):

Եթե α անկյունը սուր է, ապա DOM ուղղանկյուն եռանկյունից (տե՛ս նկ. 31) ունենք

$$\sin\alpha=\frac{MD}{OM},\qquad \cos\alpha=\frac{OD}{OM}:$$

Բայց $OM=1$, $MD=y$, $OD=x$, ուստի

$$\sin\alpha=y,\ \cos\alpha=x: \qquad (1)$$

Այսպիսով՝ α սուր անկյան սինուսը հավասար է M կետի y օրդինատին, իսկ α անկյան կոսինուսը՝ M կետի x աբսցիսին: Եթե α անկյունը ուղիղ է, բութ է, փռված է (անկյուններ AOC-ն, AON-ը և AOB-ն՝ նկ. 31-ում) կամ $\alpha=0^0$, ապա α անկյան սինուսը և կոսինուսը նույնպես կսահմանենք ըստ (1) բանաձևերի: Այսպիսով՝ *$0^0\le\alpha\le180^0$ միջակայքի ցանկացած α անկյան սինուս կոչվում է M կետի y օրդինատը, իսկ α անկյան կոսինուս՝ M կետի x աբսցիսը*: Քանի որ միավոր կիսաշրջանագծերի կետերի (x,y) կոորդինատները սահմանափակված են $0\le y\le1$ և $-1\le x\le1$ միջակայքերում, ապա $0^0\le\alpha\le180^0$ միջակայքի յուրաքանչյուր α-ի համար տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները.

$$0\le\sin\alpha\le1,\qquad -1\le\cos\alpha\le1:$$

Գտնենք սինուսի և կոսինուսի արժեքները 0^0, 90^0 և 180^0 անկյունների համար: Դրա համար դիտարկենք OA, OC և OB ճառագայթները (տե՛ս նկ. 31): Քանի որ A, C և B կետերն ունեն $A(1,0)$, $C(0,1)$, $B(-1,0)$ կոորդինատները, ապա

$$\sin0^0=0,\ \sin90^0=1,\ \sin180^0=0,$$
$$\cos0^0=1,\ \cos90^0=0,\ \cos180^0=-1: \qquad (2)$$

α անկյան ($\alpha\ne90^0$) տանգենս կոչվում է $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ հարաբերությունը, այսինքն՝

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}: \qquad (3)$$

$\alpha=90^0$ դեպքում $tg\alpha$-ն որոշված չէ, քանի որ $\cos90^0=0$, և (3) բանաձևի հայտարարը դառնում է զրո: Օգտագործելով (2) բանաձևը՝ գտնում ենք. $tg0^0=0$, $tg180^0=0$:

Օգտագործվում է նաև α անկյան տանգենսի հակադարձը, որը կոչվում է α անկյան *կոտանգենս*՝ նշանակվում է $ctg\alpha$: Այսինքն՝ α

անկյան ($\alpha \neq 0^0$, 180^0) կոտանգենս կոչվում է $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ հարաբերությունը, այն է.

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (4)$$

$\alpha=0^0$ և $\alpha=180^0$ դեպքում α անկյան կոտանգենսը որոշված չէ, քանի որ այդ դեպքում (4) բանաձևի հայտարարը դառնում է զրո: Քանի որ $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$, այսինքն՝ α անկյան կոտանգենսը անմիջապես արտահայտվում է α անկյան տանգենսով, α անկյան կոտանգենսի կիրառությունը փոխարինվում է տանգենսով:

17 **Եռանկյունաչափական հիմնական նույնությունը:** Նկար 31-ում պատկերված են կոորդինատների Oxy համակարգը և O կենտրոնով միավոր կիսաշրջանագիծը: Այդ կիսաշրջանագծի կամայական $M(x,y)$ կոորդինատներով կետի հեռավորությունը O կենտրոնից հավասար է 1-ի: Հաշվի առնելով (1) բանաձևը, այն է՝ $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$, գրենք երկու՝ $O(0,0)$ և $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$ կետերի հեռավորության բանաձևը: Ստանում ենք.

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \qquad (5)$$

հավասարությունը, որը տեղի ունի $0^0 \leq \alpha \leq 180^0$ միջակայքի ցանկացած α անկյան համար: (5) հավասարությունը կոչվում է *եռանկյունաչափական հիմնական նույնություն:* §1-ում այդ նույնությունը մենք ապացուցել էինք միայն սուր անկյան համար:

Օգտագործելով եռանկյունաչափական հիմնական նույնությունը՝ կարող ենք α անկյան սինուսը արտահայտել նույն անկյան կոսինուսով կամ հակառակը: Օրինակ. գտնել $\sin\alpha$-ն, եթե $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

(5) բանաձևից գտնում ենք. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$:

18 **Բերման բանաձևեր:** Երբեմն հարկ է լինում գտնել $90^0 \pm \alpha$ կամ $180^0-\alpha$ տեսքի անկյունների սինուսը, կոսինուսը կամ տանգենսը՝ ունենալով α անկյան սինուսը, կոսինուսը կամ տանգենսը: Այդ դեպքում օգտագործվում են որոշ բանաձևեր, որոնք կոչվում են *բերման բանաձևեր:*

§1-ի 12 կետում մենք ցույց ենք տվել, որ եթե ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյուններից մեկը հավասար է α, ապա մյուսը հավասար է $90^0-\alpha$: Բայց 90^0-ը լրացնող երկու սուր անկյուններից մեկի սինուսը հավասար է մյուսի կոսինուսին: Այսինքն՝ եթե α-ն սուր անկյուն է, ապա

$$sin(90^0-\alpha)=cos\alpha, \qquad cos(90^0-\alpha)=sin\alpha \qquad (6)$$

Այժմ ցույց տանք, որ $sin(90^0+\alpha)=cos\alpha$, $cos(90^0+\alpha)=-sin\alpha$ (7)

Դիցուք՝ $\alpha=\angle MOD$ և $90^0+\alpha=\angle M_1OD$ (նկ. 32): Ունենք, որ $x=cos\alpha$, $y=sin\alpha$, $x_1=cos(90^0+\alpha)$, $y_1=sin(90^0+\alpha)$: ODM և OD_1M_1 ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են՝ ըստ եռանկյունների հավասարության երկրորդ հայտանիշի ($OM=OM_1$ $\angle MOD=\angle M_1OD_1$, $\angle D=\angle D_1=90^0$): Ուստի՝ $OD_1=OD$ և $M_1D_1=MD$: Բայց $OD=x$, $OD_1=y_1$, $MD=y$, $M_1D_1=-x_1$: Հետևաբար՝ $x=y_1$, $y=-x_1$, այսինքն՝ $cos\alpha=sin(90^0+\alpha)$, $sin\alpha=-cos(90^0+\alpha)$, որտեղից և ստացվում են (7) բանաձևերը:

Այժմ արտածենք բերման բանաձևը $180^0-\alpha$ տեսքի անկյան համար: Դիցուք՝ $\alpha=\angle MOD$ և $180^0-\alpha=\angle M_1OD$ (նկ. 33): Ունենք, որ $x=cos\alpha$, $y=sin\alpha$, $x_1=cos(180^0-\alpha)$, $y_1=sin(180^0-\alpha)$: ODM և OD_1M_1 ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են (բացատրեք, թե ինչու): Ուստի՝ $MD=M_1D_1$ և $OD=OD_1$: Բայց $OD=x$, $OD_1=-x_1$, $MD=y$ և $M_1D_1=y_1$: Հետևաբար՝ $x=-x_1$ և $y=y_1$, այսինքն՝

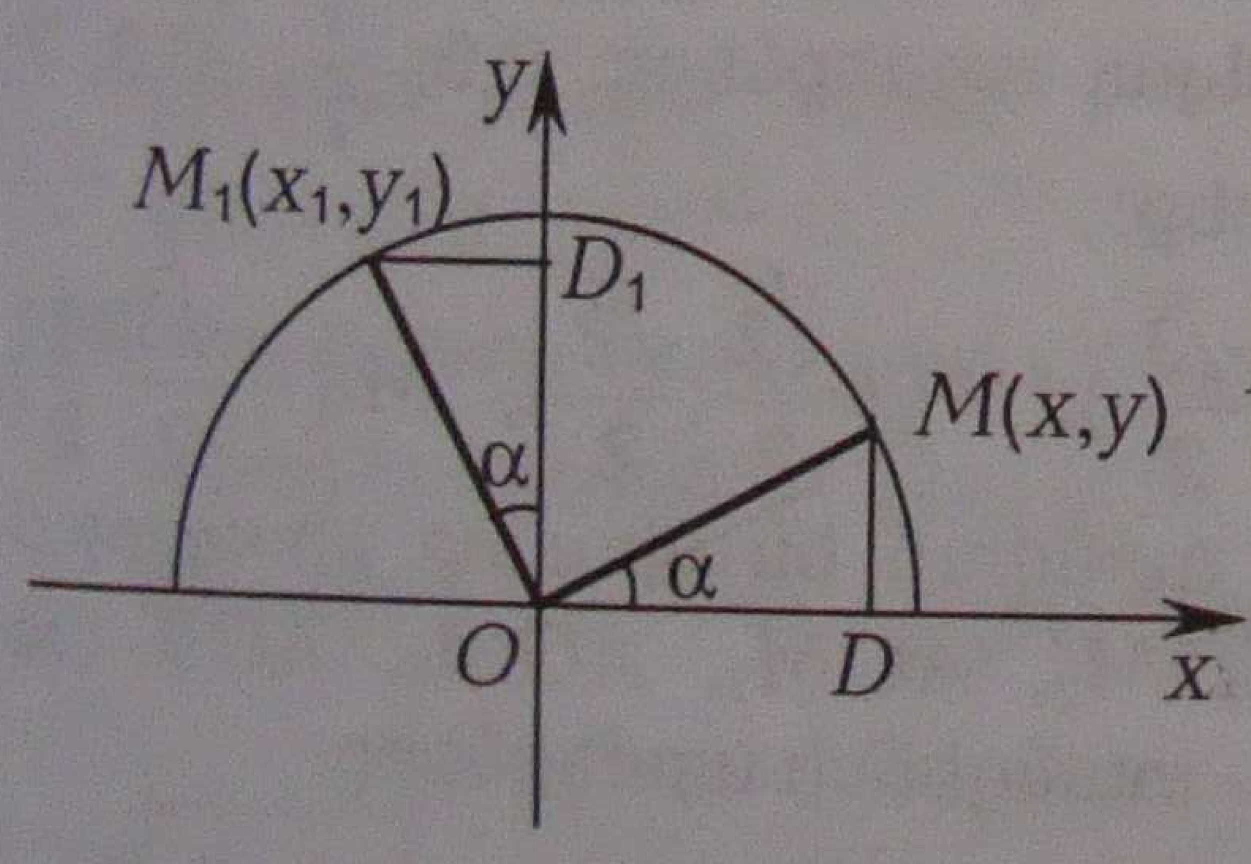
$$cos(180^0-\alpha)=-cos\alpha \text{ և } sin(180^0-\alpha)=sin\alpha: \qquad (8)$$

Տանգենսի համար բերման բանաձևերն ստացվում են տվյալ անկյան սինուսի և կոսինուսի արժեքների միջոցով: Օրինակ. եթե $\alpha\neq90^0$, ապա

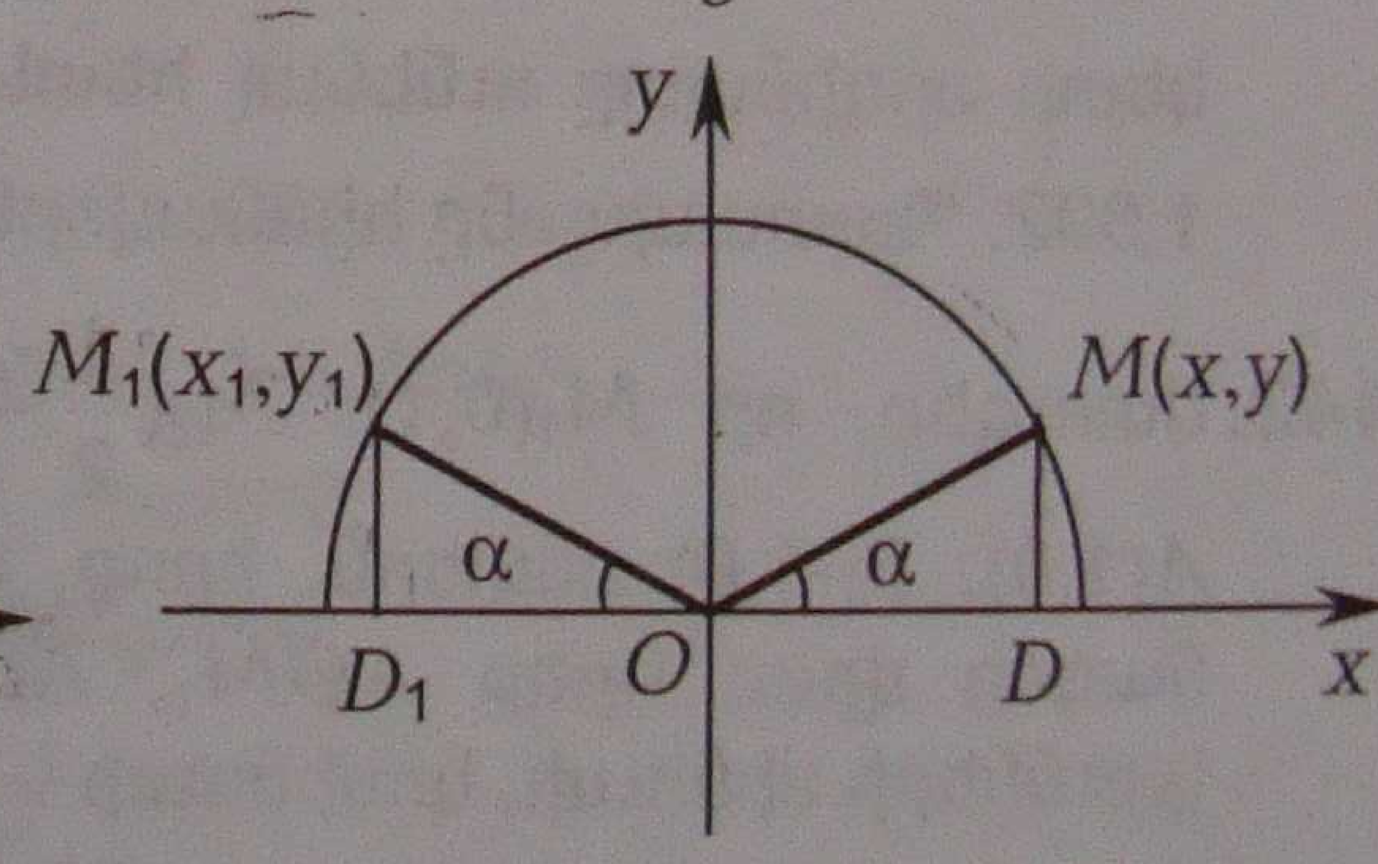
$$tg(180^0-\alpha)=\frac{sin(180^0-\alpha)}{cos(180^0-\alpha)}=\frac{sin\,\alpha}{-cos\,\alpha}=-tg\alpha,$$

եթե $\alpha\neq0^0$, ապա

$$tg(90^0+\alpha)=\frac{sin(90^0+\alpha)}{cos(90^0+\alpha)}=\frac{cos\,\alpha}{-sin\,\alpha}=-\frac{1}{tg\alpha}=-ctg\alpha:$$

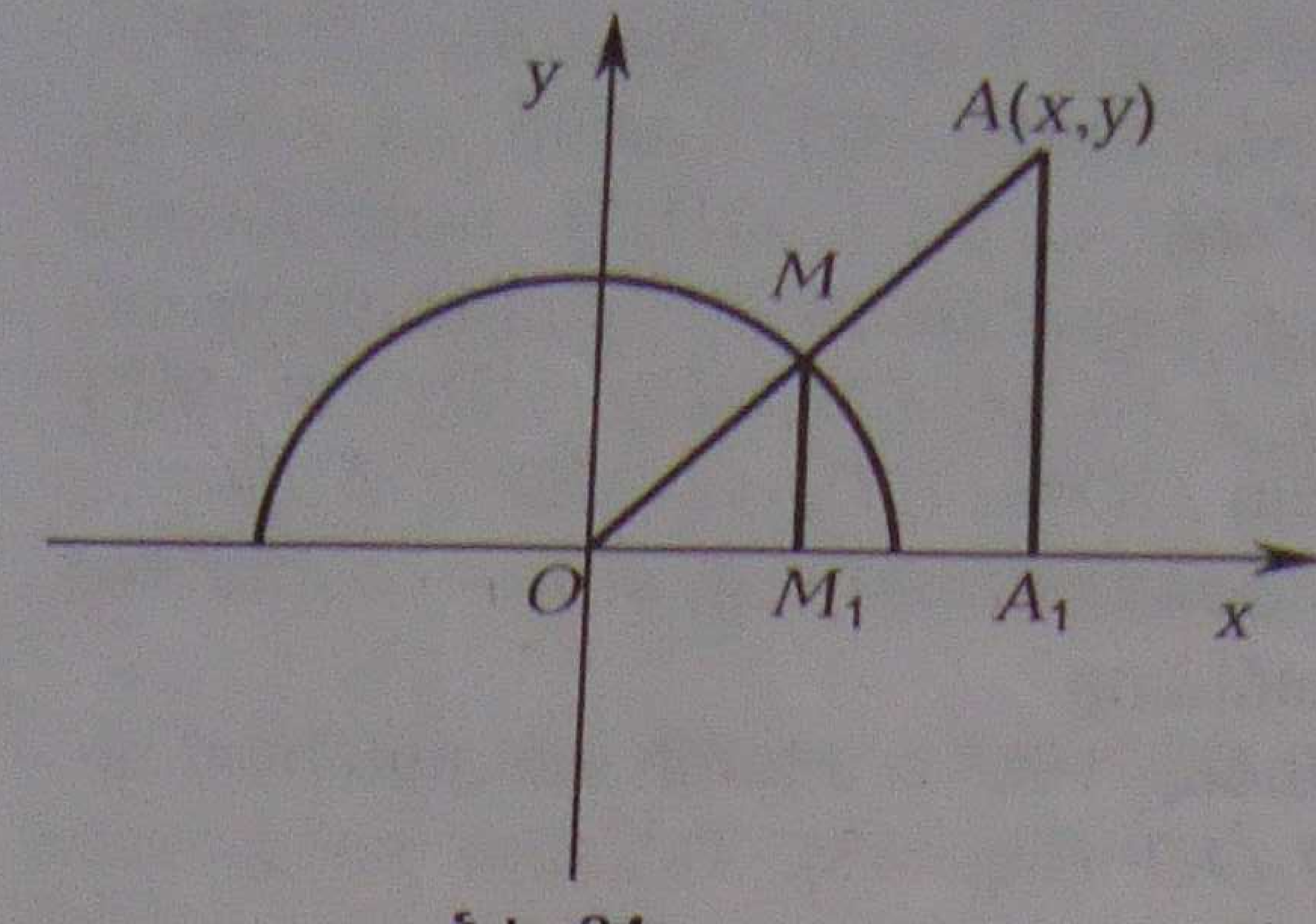


Նկ. 32



Նկ. 33

(19) Կետի կոորդինատների հաշվման բանաձևերը: Դիցուք տրված են կոորդինատների Oxy համակարգը և ոչ բացասական y օրդինատով կամայական $A(x,y)$ կետը (նկ. 34): A կետի x և y կոորդինատներն արտահայտենք OA հատվածի a երկարության և OA ճառագայթի ու աբսցիսների Ox դրական կիսառանցքի կազմած α անկյան միջոցով:



Նկ. 34

Դրա համար նշանակենք M տառով OA ճառագայթի և միավոր կիսաշրջանագծի հատման կետը: Ըստ (1) բանաձևի M կետի կոորդինատներն են $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$:

Այսինքն $OM_1=\cos\alpha$, $MM_1=\sin\alpha$: Ox առանցքին A կետից տանենք AA_1 ուղղահայացը: Պարզ է, որ $OA=a$, $OA_1=x$, $AA_1=y$: OMM_1 և OAA_1 եռանկյունները նման են ($\angle O$-ն ընդհանուր է, $MM_1 \| AA_1$): Ուստի $\dfrac{OA}{OM}=\dfrac{AA_1}{MM_1}=\dfrac{OA_1}{OM_1}$, այսինքն $\dfrac{a}{1}=\dfrac{y}{\sin\alpha}=\dfrac{x}{\cos\alpha}$: Այստեղից ստանում ենք

$$x=a\cos\alpha,\ y=a\sin\alpha: \qquad (9)$$

Հարցեր և խնդիրներ

141. Պատասխանեք հարցերին. **ա)** կարո՞ղ է, արդյոք, միավոր կիսաշրջանագծի կետի աբսցիսը ունենալ հետևյալ արժեքները. 0,3; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $1\frac{2}{3}$; -2,8, **բ)** կարո՞ղ է, արդյոք, միավոր կիսաշրջանագծի կետի օրդինատը ունենալ հետևյալ արժեքները. 0,6; $\frac{1}{7}$; -0,3; 7; 1,002: Պատասխանը հիմնավորեք:

142. Ստուգեք, որ $M_1(0,1)$, $M_2(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $M_3(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $M_4(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$, $A(1,0)$, $B(-1,0)$ կետերն, իրոք, գտնվում են միավոր կիսաշրջանագծի վրա: Գրեք AOM_1, AOM_2, AOM_3, AOM_4, AOB անկյունների սինուսի, կոսինուսի և տանգենսի արժեքները:

143. Գտեք $\sin\alpha$-ն, եթե. **ա)** $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, **բ)** $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, **գ)** $\cos\alpha=-1$:

144. Գտեք $\cos\alpha$-ն, եթե. **ա)** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, **բ)** $\sin\alpha=\frac{1}{4}$, **գ)** $\sin\alpha=0$:

145. Գտեք $tg\alpha$-ն, եթե. **ա)** $\cos\alpha=1$, **բ)** $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, **գ)** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ և $0^0<\alpha<90^0$, **դ)** $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ և $90^0<\alpha<180^0$:

146. Հաշվեք 120^0, 135^0, 150^0 անկյունների սինուսը, կոսինուսը և տանգենսը:

147. Կառուցեք $\angle A$-ն, եթե. **ա)**$sinA=\frac{2}{3}$, **բ)**$cosA=\frac{3}{4}$, **գ)**$cosA=-\frac{2}{5}$:

148. Միավոր կիսաշրջանագիծը հատող OA ճառագայթի և աբսցիսների Ox դրական կիսառանցքի կազմած անկյունը հավասար է α: Գտեք A կետի կոորդինատները, եթե. **ա)**$OA=3$, $\alpha=45^0$, **բ)**$OA=1{,}5$, $\alpha=90^0$, **գ)**$OA=5$, $\alpha=150^0$, **դ)**$OA=1$, $\alpha=180^0$, **ե)**$OA=2$, $\alpha=30^0$:

149. Գտեք OA ճառագայթի և Ox դրական կիսառանցքի կազմած անկյունը, եթե A կետն ունի հետևյալ կոորդինատները. **ա)**$(2,2)$, **բ)**$(0,3)$, **գ)**$(-\sqrt{3},1)$, **դ)**$\left(-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$:

150. Ճշմարի՞տ է, արդյոք, որ եթե $cos\alpha=cos\beta$, ապա $\alpha=\beta$: Պատասխանը հիմնավորեք:

151. Ճշմարի՞տ է, արդյոք, որ եթե $sin\alpha=sin\beta$, ապա $\alpha=\beta$ կամ $\alpha=180^0-\beta$: Պատասխանը հիմնավորեք:

152. Բաղդատեք $sin\alpha$-ն և $sin\beta$-ն, եթե.

ա)$\alpha<\beta\leq 90^0$, **բ)**$90^0\leq\alpha<\beta\leq 180^0$:

153. Բաղդատեք $cos\alpha$-ն և $cos\beta$-ն, եթե.

ա)$\alpha<\beta\leq 90^0$, **բ)**$90^0\leq\alpha<\beta\leq 180^0$:

154. Բաղդատեք $tg\alpha$-ն և $tg\beta$-ն, եթե.

ա)$\alpha<\beta<90^0$, **բ)**$90^0<\alpha<\beta<180^0$:

155. Դասավորեք աճման կարգով.

ա)$sin36^0$, $sin12^0$, $sin172^0$,

բ)$cos64^0$, $cos34^0$, $cos95^0$,

գ)$tg70^0$, 1, $tg30^0$:

156. Սու՞ր, ուղի՞ղ, բթ՞ բութ անկյուն է A-ն, եթե.

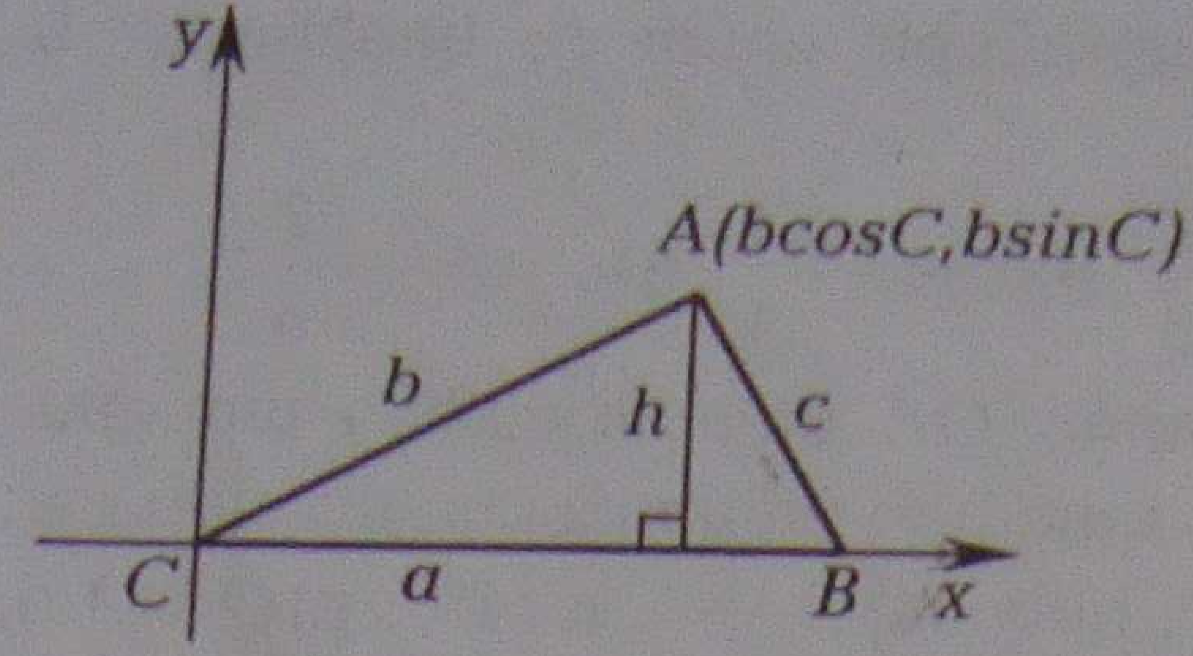
ա)$sinA>0$, $cosA>0$, **բ)**$sinA>0$, $cosA=0$,

գ)$sinA>0$, $cosA<0$, **դ)**$tgA>0$, **ե)**$tgA<0$:

§ 4 ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

(20) Թեորեմ եռանկյան մակերեսի մասին:

Թեորեմ: *Եռանկյան մակերեսը հավասար է նրա երկու կողմերի և դրանցով կազմված անկյան սինուսի արտադրյալի կեսին:*



Նկ. 35

Ապացուցում: Դիցուք ABC եռանկյան մեջ $BC=a$, $CA=b$ և S-ը այդ եռանկյան մակերեսն է: Ապացուցենք, որ

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C:$$

Ներմուծենք C սկզբնակետով կոորդինատային համակարգ այնպես, որ B կետը գտնվի Cx դրական կիսառանցքի վրա, իսկ A կետն ունենա դրական օրդինատ (նկ. 35): Տվյալ եռանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել $S=\frac{1}{2}ah$ բանաձևով, որտեղ h-ը եռանկյան բարձրությունն է: Բայց h-ը հավասար է A կետի օրդինատին, այսինքն $h=b\sin C$: Հետևաբար՝ $S=\frac{1}{2}ab\sin C$: Թեորեմն ապացուցված է:

(21) Սինուսների թեորեմը:

Թ ե ո ր ե մ: *Եռանկյան կողմերը համեմատական են հանդիպակաց անկյունների սինուսներին:*

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Դիցուք՝ ABC եռանկյան մեջ $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$: Ապացուցենք, որ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}:$$

Ըստ եռանկյան մակերեսի մասին թեորեմի՝

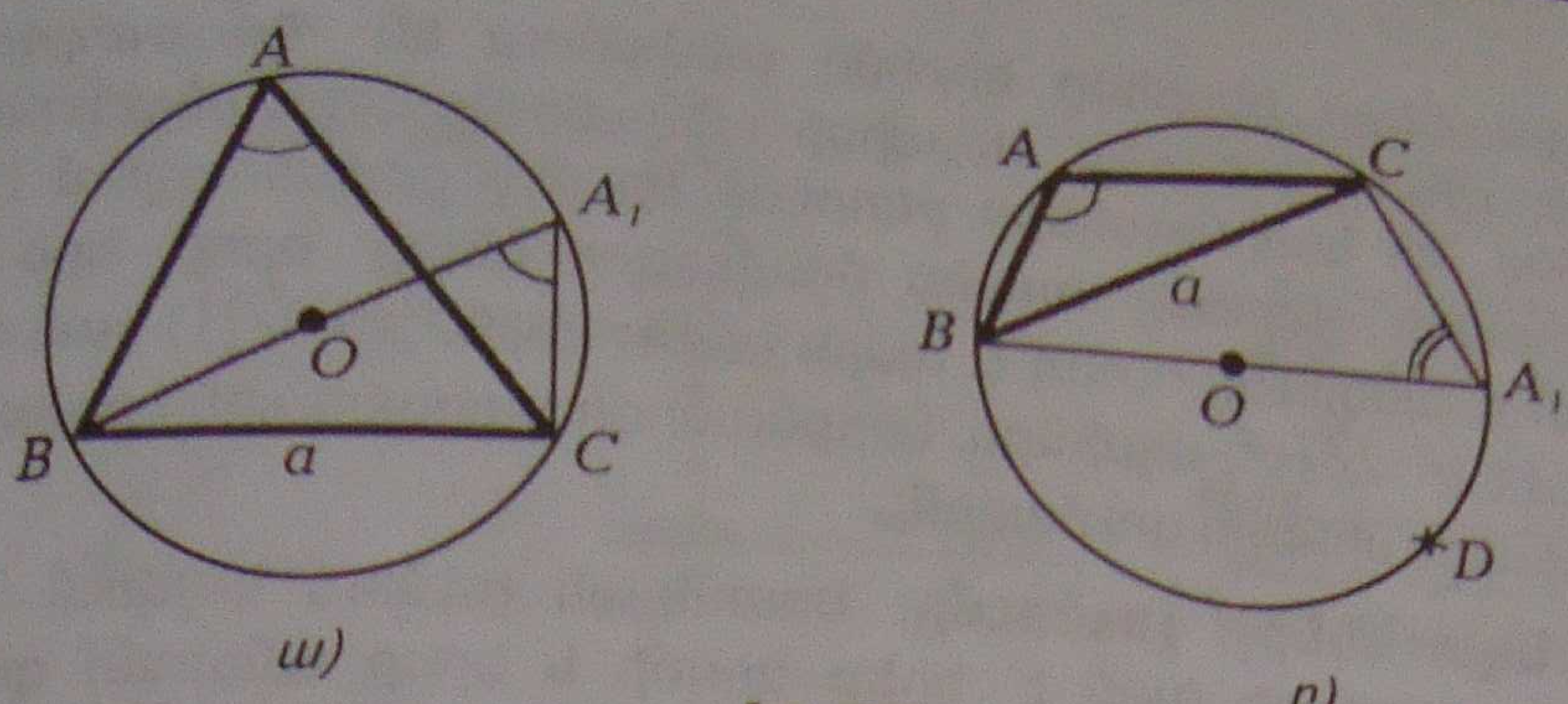
$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,\ S=\frac{1}{2}bc\sin A,\ S=\frac{1}{2}ac\sin B:$$

Առաջին երկու հավասարությունից ստանում ենք $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A$, որտեղից՝ $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$: Ճիշտ նույն կերպ երկրորդ և երրորդ հավասարություններից հետևում է $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$:

Այսպիսով՝ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$: Թեորեմն ապացուցված է:

Պ ա ր զ ա բ ա ն ու մ: Ապացուցենք, որ *եռանկյան կողմի և հանդիպակաց անկյան սինուսի հարաբերությունը հավասար է արտագծյալ շրջանագծի տրամագծին:*

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Դիցուք՝ R-ը ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղն է: Ապացուցենք, որ $\frac{BC}{\sin A}=2R$, կամ $BC=2R\sin A$: Տանենք BA_1 տրամագիծը (նկ. 36) և դիտարկենք A_1BC



Նկ. 36

եռանկյունը (A_1 և C կետերի համընկնելու դեպքը դիտարկեք ինքնուրույն): Այդ եռանկյան C անկյունը ուղիղ է, ուստի՝ $BC=BA_1sinA_1$: Բայց $sinA=sinA_1$: Իսկապես, եթե A_1 կետն ընկած է BAC աղեղի վրա (նկ. 36,ա), ապա $\angle A_1=\angle A$, իսկ եթե ընկած է BDC աղեղի վրա (նկ. 36,բ), ապա $\angle A_1=180^0-\angle A$: Ե՛վ մեկ, և՛ մյուս դեպքում $sinA_1=sinA$: Հետևաբար՝ $BC=BA_1sinA$, կամ՝ $BC=2RsinA$:

Այսպիսով՝ կամայական ABC եռանկյան համար, որի կողմերն են՝ $AB=c$, $BC=a$ և $CA=b$, տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

որտեղ R-ը արտագծյալ շրջանագծի շառավիղն է:

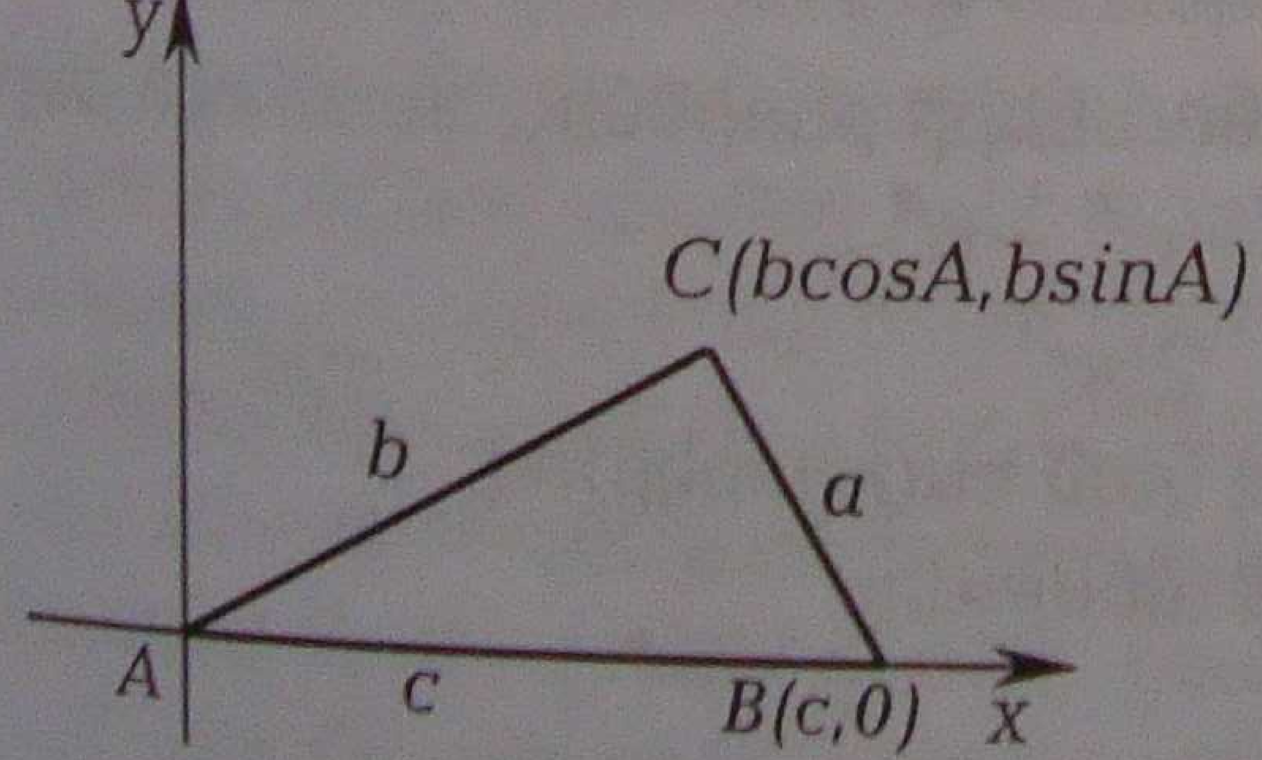
22 Կոսինուսների թեորեմը:

Թ ե ո ր ե մ : *Եռանկյան կողմի քառակուսին հավասար է մյուս երկու կողմերի քառակուսիների գումարին՝ հանած այդ կողմերի և դրանց կազմած անկյան կոսինուսի արտադրյալի կրկնակին:*

Ա պ ա ց ու ց ու մ : Դիցուք՝ ABC եռանկյան մեջ $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$: Ապացուցենք, որ, օրինակ՝

$$a^2=b^2+c^2-2bccosA: \qquad (1)$$

Ներմուծենք A սկզբնակետով կոորդինատային համակարգ այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկար 37-ում: Այդ դեպքում B կետը կունենա $(c,0)$ կոորդինատներ, իսկ C կետը՝ $(bcosA,\ bsinA)$ կոորդինատներ: Ըստ երկու կետերի հեռավորության բանաձևի՝ ստանում ենք.



Նկ. 37

$$BC^2=a^2=(bcosA-c)^2+b^2sin^2A=$$
$$=b^2cos^2A+b^2sin^2A-2bccosA+c^2=$$
$$=b^2+c^2-2bccosA:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Կոսինուսների թեորեմը երբեմն անվանում են *Պյութագորասի ընդհանրացված թեորեմ*: Այդպիսի անվանումը պայմանավորված է այն բանով, որ կոսինուսների թեորեմը իր մեջ բովանդակում է նաև Պյութագորասի թեորեմը՝ որպես մասնավոր դեպք: Իրոք, եթե ABC եռանկյան A անկյունը ուղիղ է, ապա $cosA=cos90^0=0$, և (1) բանաձևից ստացվում է $a^2=b^2+c^2$, այսինքն՝ ներքնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին:

(23) **Եռանկյունների լուծումը:** Եռանկյան լուծում կոչվում է նրա բոլոր վեց տարրերի (այն է՝ երեք կողմի և երեք անկյան) գտնելը՝ եռանկյունը որոշող որևէ երեք տրված տարրերի միջոցով: Դիտարկենք եռանկյունների լուծման երեք խնդիր: Այդ ընթացքում կօգտագործենք ABC եռանկյան կողմերի հետևյալ նշանակումը. $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$:

Խնդիր 1 (եռանկյան լուծումը՝ տրված երկու կողմով և նրանց կազմած անկյունով): *Տրված են* a*-ն,* b*-ն,* $\angle C$*-ն: Գտնել* c*-ն,* $\angle A$*-ն,* $\angle B$*-ն:*

Լուծում: 1. Ըստ կոսինուսների թեորեմի՝ գտնում ենք c-ն.

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}:$$

2. Օգտվելով կոսինուսների թեորեմից՝ ստանում ենք.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}:$$

A անկյունը գտնում ենք աղյուսակով կամ հաշվարկիչով:

3. $\angle B=180^0-\angle A-\angle C$:

Խնդիր 2 (եռանկյան լուծումը՝ տրված կողմով և նրան առընթեր երկու անկյունով): *Տրված են* a*-ն,* $\angle B$*-ն,* $\angle C$*-ն: Գտնել* $\angle A$*-ն,* b*-ն,* c*-ն:*

Լուծում: 1. $\angle A=180^0-\angle B-\angle C$:

2. Օգտվելով սինուսների թեորեմից՝ գտնում ենք b-ն և c-ն:

$$b=a\frac{\sin B}{\sin A},\ c=a\frac{\sin C}{\sin A}:$$

Խնդիր 3 (եռանկյան լուծումը՝ տրված երեք կողմով): *Տրված են* a*-ն,* b*-ն,* c*-ն: Գտնել* $\angle A$*-ն,* $\angle B$*-ն,* $\angle C$*-ն:*

Լուծում: 1. Օգտվելով կոսինուսների թեորեմից՝ ստանում ենք.

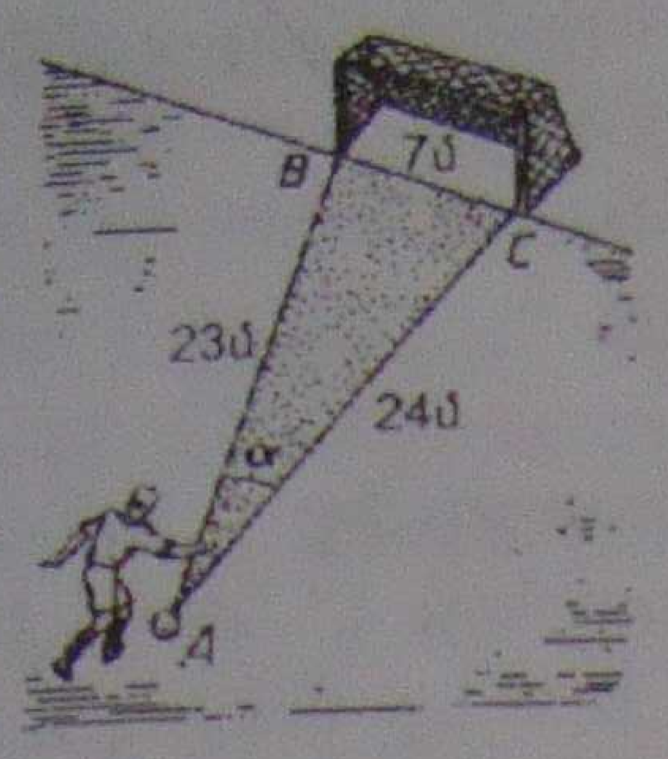
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}:$$

A անկյունը գտնում ենք աղյուսակով կամ հաշվարկիչով:

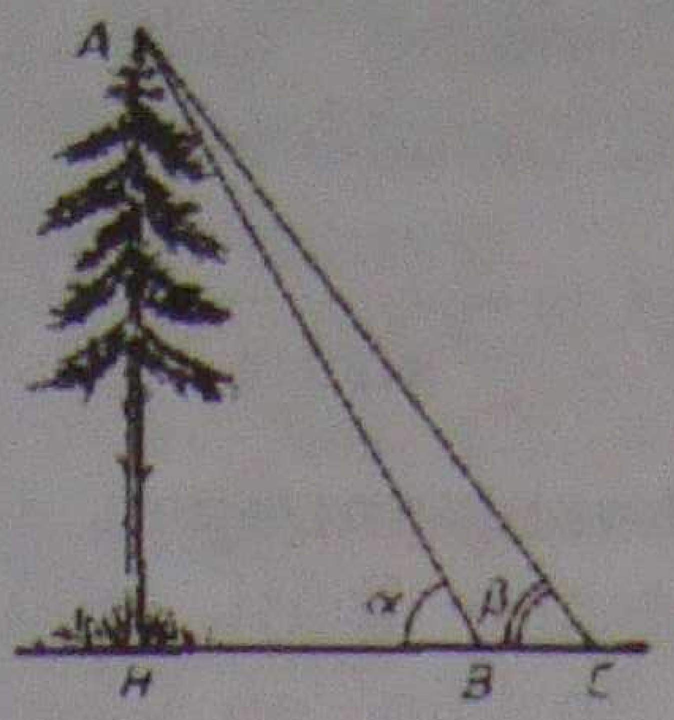
2. Նույն կերպ գտնում ենք նաև B անկյունը:

3. $\angle C=180^0-\angle A-\angle B$:

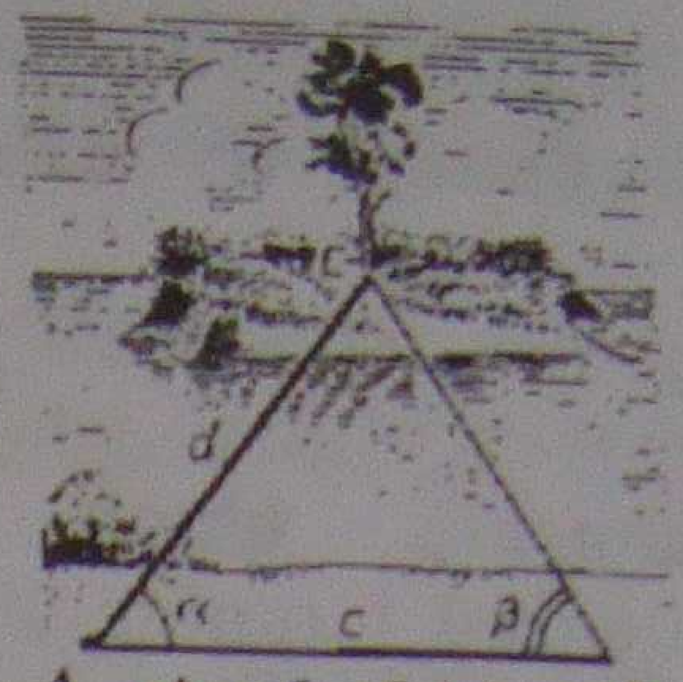
Օրինակ: Ֆուտբոլի գնդակը գտնվում է ֆուտբոլի դաշտի A կետում՝ դարպասաձողերի B և C հիմքերից 23մ և 24մ հեռավորու-



Նկ. 38



Նկ. 39



Նկ. 40

թյունների վրա (նկ. 38): Ֆուտբոլիստը գնդակն ուղարկում է դեպի դարպասը: Գտեք այն α անկյունը, որով գնդակը մտնում է դարպասը, եթե դարպասի լայնությունը 7մ է:

Լուծում: Դիտենք ABC եռանկյունը, որի գագաթներն են A-ն՝ գնդակի գտնված կետը, B-ն և C-ն՝ դարպասաձողերի հիմքերը: Ըստ խնդրի տվյալների՝ $c=AB=23$մ, $b=AC=24$մ, $a=BC=7$մ: Այս տվյալները բավարար են ABC եռանկյունը լուծելու և α անկյունը գտնելու համար (տե՛ս խնդիր 3-ը): Կոսինուսների թեորեմի օգնությամբ գտնում ենք $\cos A$-ն ($\alpha=\angle A$). $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{24^2+23^2-7^2}{2\cdot 24\cdot 23}$:

կատարելով հաշվումները՝ աղյուսակի կամ հաշվարկիչի օգնությամբ գտնում ենք A անկյունը: Ստացվում է $\alpha\approx16^0 57$:

(24) Չափողական աշխատանքներ: Եռանկյունաչափական բանաձևերը լայնորեն կիրառվում են տեղանքում զանազան չափողական աշխատանքներ կատարելիս:

ա)Առարկայի բարձրության չափումը: Ենթադրենք պահանջվում է որոշել ինչ-որ առարկայի AH բարձրությունը (նկ. 39): Դրա համար առարկայի H հիմքից որոշակի a հեռավորության վրա նշենք մի B կետ և չափենք ABH անկյունը. $\angle ABH=\alpha$: Այդ տվյալներով AHB ուղղանկյուն եռանկյունից գտնում ենք առարկայի բարձրությունը՝ $AH=a\,tg\alpha$: Եթե առարկայի հիմքը անմատչելի է, ապա կարելի է վարվել այսպես. առարկայի H հիմքով անցնող որևէ ուղղի վրա միմյանցից որոշակի a հեռավորության վրա նշում ենք երկու կետ՝ B-ն և C-ն, և չափում ենք ABH և ACB անկյունները. $\angle ABH=\alpha$ և $\angle ACB=\beta$ (տե՛ս նկ. 39): Այս տվյալները բավարար են ABC եռանկյան բոլոր տարրերը, մասնավորապես՝ AB-ն որոշելու համար: Իրոք, $\angle ABH$-ը ABC եռանկյան արտաքին անկյունն է, ուստի՝ $\angle A=\alpha-\beta$: Օգտագործելով սինուսների թեորեմը՝ գտնում ենք AB կողմը.

$$AB = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}:$$

ABH ուղղանկյուն եռանկյունից գտնում ենք առարկայի AH բարձրությունը. $AH=AB\sin\alpha$: Այսպիսով՝

$$AH = \frac{a\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}:$$

բ)Անմատչելի կետի հեռավորության որոշումը: Ենթադրենք պահանջվում է գտնել A կետից մինչև անմատչելի C կետը եղած d հեռավորությունը (նկ. 40): Հիշենք, որ նման խնդիր մենք լուծել ենք եռանկյունների նմանության հայտանիշների միջոցով: Այժմ դիտարկենք խնդրի լուծման մեկ այլ եղանակ՝ օգտագործելով եռանկյունաչափական բանաձևերը:

Տեղանքում ընտրում ենք B կետ և չափում AB հատվածի c երկարությունը: Այնուհետև, օգտագործելով անկյունաչափ սարք, չափում ենք A և B անկյունները. $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$: Այս տվյալները, այն է՝ c-ն, α-ն, β-ն, բավարար են ABC եռանկյունը լուծելու և $d=AC$ հեռավորությունը որոշելու համար:

Նախ գտնենք $\angle C$-ն և $\sin C$-ն.

$\angle C=180^0-\alpha-\beta$, $\sin C=\sin(180^0-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)$: Այնուհետև, սինուսների թեորեմի օգնությամբ, գտնենք d-ն: Քանի որ $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$, $AC=d$, $AB=c$, $\angle B=\beta$, ապա $d=\dfrac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$:

Հարցեր և խնդիրներ

157. Գտեք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե. **ա)**$AB=6\sqrt{8}$ սմ, $AC=4$սմ, $\angle A=60^0$, **բ)**$BC=3$սմ, $AB=18\sqrt{2}$ սմ, $\angle B=45^0$, **գ)**$AC=14$սմ, $CB=7$սմ, $\angle C=48^0$:

158. ABC եռանկյան մակերեսը 60սմ^2 է: Գտեք AB կողմը, եթե $AC=15$սմ, $\angle A=30^0$:

159. Գտեք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե. **ա)**$\angle A=\alpha$, իսկ B և C գագաթներից տարված բարձրությունները համապատասխանաբար հավասար են h_b և h_c, **բ)**$\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, իսկ B գագաթից տարված բարձրությունը հավասար է h:

160. Գտեք հավասարասրուն եռանկյան մակերեսը, եթե նրա սրունքը 2սմ է, իսկ հիմքին առընթեր անկյունը՝ 15^0:

161. ABC եռանկյան մեջ $\angle ABC=120^0$, $AB=6$սմ, իսկ եռանկյան մակերեսը հավասար է $6\sqrt{3}$ սմ^2: Գտեք BC-ն:

162. ABC եռանկյան մեջ $AB=3$սմ, $BC=4$սմ: BD-ն եռանկյան կիսորդ է, և $\angle ABD=\alpha$: Գտեք ABD եռանկյան մակերեսը:

163. ABC եռանկյան մեջ AC=8սմ, BC=6սմ, $\angle C=\alpha$: AA_1-ը և BB_1-ը եռանկյան միջնագծերն են, որոնք հատվում են O կետում: Գտեք AOB_1 եռանկյան մակերեսը:

164. ABC եռանկյան մեջ AA_1-ը և CC_1-ը միջնագծեր են, որոնք հատվում են O կետում: AA_1=9սմ, CC_1=12սմ և $\angle AOC=120^0$: Գտեք ABC եռանկյան մակերեսը:

165. Սինուսների և կոսինուսների թեորեմների օգնությամբ լուծեք ABC եռանկյունը, եթե.

ա) $\angle A=60^0$, $\angle B=40^0$, c=14,

բ) $\angle A=30^0$, $\angle C=75^0$, b=4,5,

գ) $\angle A=80^0$, a=16, b=10,

դ) $\angle B=45^0$, $\angle C=70^0$, a=24,6,

ե) $\angle A=60^0$, a=10, b=7,

զ) a=6,3, b=6,3, $\angle C=54^0$,

է) b=32, c=45, $\angle A=87^0$,

ը) a=14, b=18, c=20,

թ) a=6, b=7,3, c=4,8:

166. ABC եռանկյան մեջ AC=12սմ, $\angle A=75^0$, $\angle C=60^0$: Գտեք AB-ն և S_{ABC}-ն:

167. Գտեք ABC եռանկյան կողմերը, եթե $\angle A=45^0$, $\angle C=30^0$, իսկ AD բարձրությունը հավասար է 3մ:

168. Գտեք եռանկյան կիսորդները, եթե նրա կողմերից մեկը հավասար է a, իսկ այդ կողմին առընթեր անկյունները հավասար են α և β:

169. Պարզել, թե սուրանկյու՞ն, ուղղանկյու՞ն, թե՞ բութանկյուն է եռանկյունը, եթե նրա կողմերը հավասար են. **ա)**5; 4 և 4, **բ)**17; 8 և 15, **գ)**9; 5 և 6:

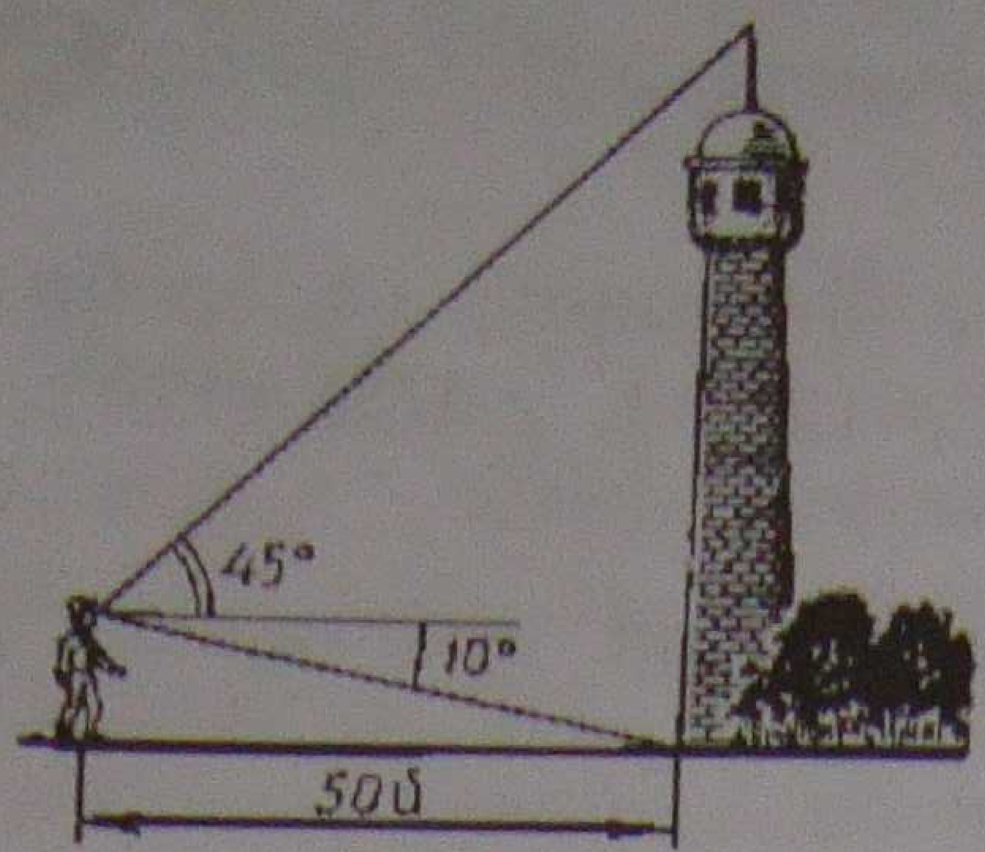
170. Շրջանագծի մեջ տարված են E կետում հատվող AB և CD լարերը: Գտեք այդ լարերի կազմած սուր անկյունը, եթե AB=13սմ, CE=9սմ, ED=4սմ, իսկ B և D կետերի հեռավորությունը հավասար է $4\sqrt{3}$ սմ:

171. ABC եռանկյան մեջ $\angle A=10^0$, $\angle C=20^0$, AC=10սմ: Գտեք այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

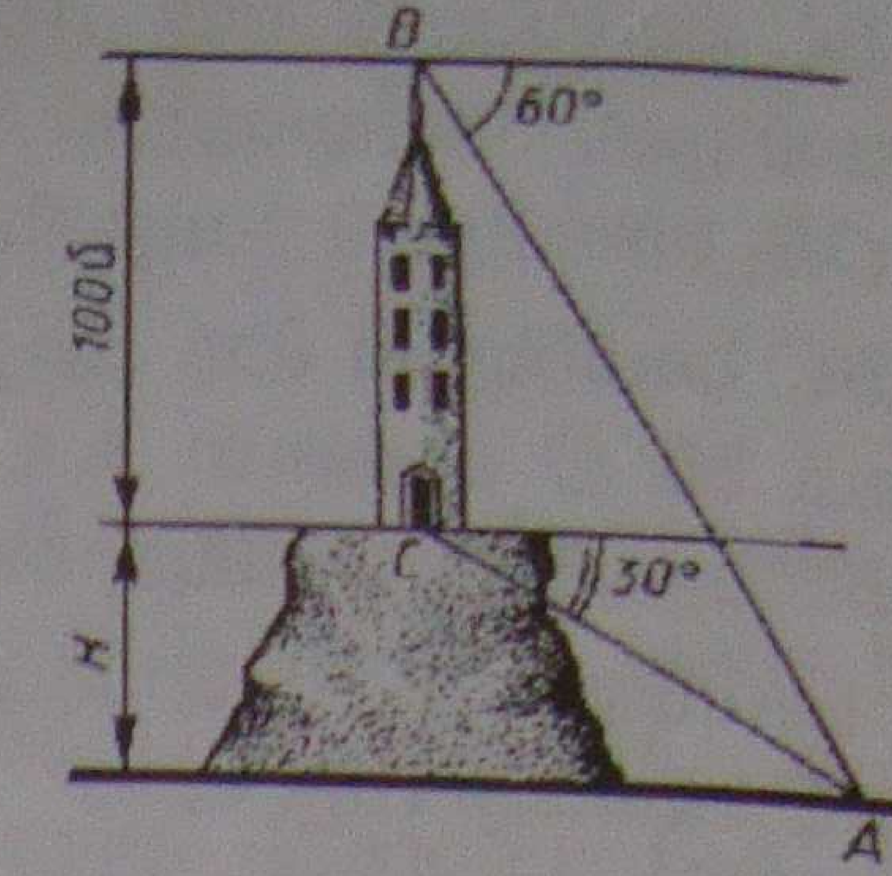
172. ABC հավասարասրուն եռանկյան B գագաթի անկյունը 120^0 է, $AC=2\sqrt{21}$: Գտեք AM միջնագիծը:

173. Եռանկյան կողմերն են 13, 14 և 15: Գտեք եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

174. ABC ուղղանկյուն եռանկյան մեջ ($\angle C=90^0$) CD-ն կիսորդ է, $\angle A=15^0$, $AC=\sqrt{3}$: Գտեք AD-ն:



Նկ. 41



Նկ. 42

175. Դիտողը գտնվում է 50մ հեռավորության վրա մի աշտարակից, որի բարձրությունը ուզում է որոշել (նկ. 41): Աշտարակի հիմքը նա տեսնում է հորիզոնի նկատմամբ 10^0 անկյան տակ, իսկ գագաթը՝ հորիզոնի նկատմամբ 45^0 անկյան տակ: Որքա՞ն է աշտարակի բարձրությունը:

176. Գետի լայնությունը որոշելու համար գետափին, միմյանցից 70մ հեռավորության վրա նշել են երկու կետ՝ A-ն ու B-ն, և չափել են CAB և ABC անկյունները, որտեղ C-ն մյուս ափին՝ գետի եզրին կից կանգնած ծառ է: Պարզվել է, որ $\angle CAB=12^0 30$, $\angle ABC=72^0 42$: Գտեք գետի լայնությունը:

177. Սարի գագաթին կա մի աշտարակ, որի բարձրությունը 100մ է (նկ. 42): Ստորոտում գտնվող ինչ-որ A առարկա դիտում են նախ՝ աշտարակի B գագաթից, որտեղից այն երևում է հորիզոնի նկատմամբ 60^0 անկյան տակ, այնուհետև՝ աշտարակի C հիմքից, որտեղից այն երևում է 30^0 անկյան տակ: Գտեք սարի H բարձրությունը:

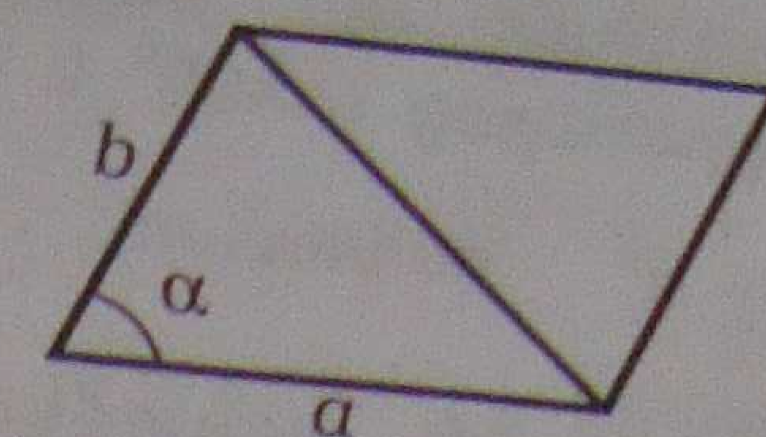
§ 5 ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ԱՅԼ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ

25 **Զուգահեռագծի մակերեսի հաշվման բանաձևը:** Դիցուք՝ զուգահեռագծի կից կողմերն են a-ն և b-ն, իսկ նրանց կազմած անկյունը՝ α-ն: Ապացուցենք, *որ զուգահեռագծի S մակերեսը հավասար է նրա կից կողմերի և դրանց կազմած անկյան սինուսի արտադրյալին,* այսինքն՝

$$S=ab\sin\alpha \qquad (1)$$

Զուգահեռագիծը անկյունագծով տրոհվում է երկու հավասար եռանկյունների, որոնցից յուրաքանչյուրի մակերեսը որոշվում է

$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ բանաձևով (նկ. 43):



Նկ. 43

Հետևաբար՝

$$S = 2S_\Delta = 2\cdot\frac{1}{2}ab\sin\alpha = ab\sin\alpha,$$

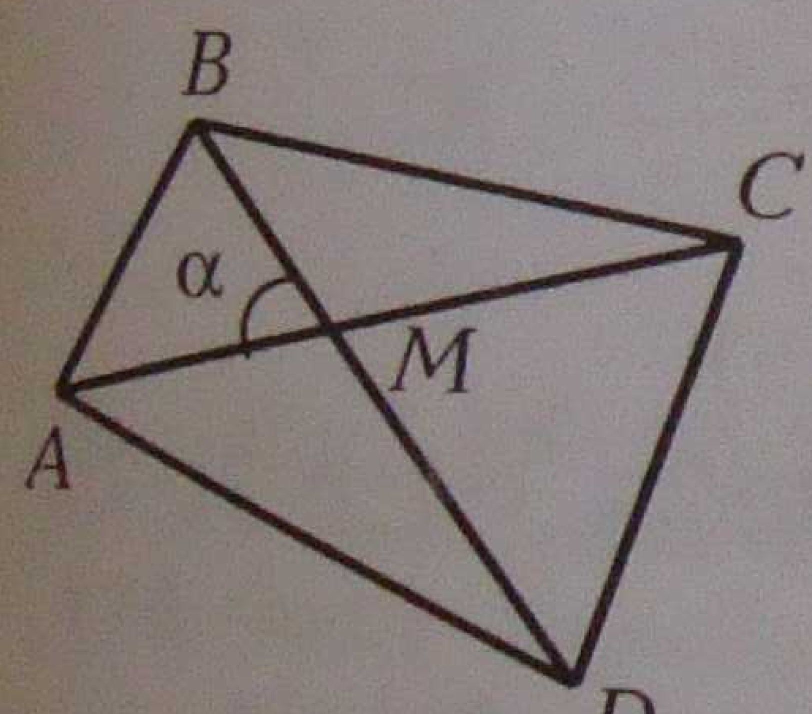
ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Պ ա ր զ ա բ ա ն ու մ : Քանի որ զուգահեռագծի յուրաքանչյուր կողմին առընթեր անկյունների գումարը 180^0 է և, ըստ բերման բանաձևի, $\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha$, ապա (1) բանաձևը ճիշտ է՝ անկախ այն բանից, թե α-ն նրա անկյուններից որն է:

26 Քառանկյան մակերեսի բանաձևը: Ապացուցենք, որ *ուռուցիկ քառանկյան մակերեսը հավասար է նրա անկյունագծերի և դրանց կազմած անկյան սինուսի արտադրյալի կեսին:*

Դիցուք՝ $ABCD$ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետը M-ն է, իսկ նրանց կազմած անկյունը՝ α-ն (նկ. 44): Քառանկյունը անկյունագծերով տրոհվում է չորս եռանկյան: Օգտվենք մակերեսների հատկությունից, եռանկյան մակերեսի բանաձևից և այնուհետև կատարենք արտահայտության պարզեցում.

$$S=S_{AMB}+S_{BMC}+S_{CMD}+S_{DMA}=\frac{1}{2}AM\cdot MB\sin\alpha+\frac{1}{2}BM\cdot MC\sin(180^0-\alpha)+$$



Նկ. 44

$$+\frac{1}{2}CM\cdot MD\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}DM\cdot MA\cdot\sin(180^0-\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha((AM\cdot MB+MB\cdot MC)+(CM\cdot MD+MD\cdot MA))=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha(BM\cdot AC+MD\cdot AC)=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha:$$

Այսպիսով՝ եթե քառանկյան անկյունագծերը նշանակենք d_1 և d_2, նրանց կազմած անկյունը՝ α, ապա քառանկյան S մակերեսի համար ստանում ենք.

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha: \qquad (2)$$

Մ ա ս ն ա վ ո ր դ ե պ ք ե ր :

ա)Քանի որ *շեղանկյան* համար $\alpha=90^0$, իսկ $\sin90^0=1$, ապա շեղանկյան մակերեսը հաշվվում է $S=\frac{1}{2}d_1d_2$ բանաձևով:

բ)Քանի որ *ուղղանկյան* անկյունագծերը հավասար են ($d_1=d_2=d$), ապա նրա մակերեսը հաշվվում է $S=\frac{1}{2}d^2\sin\alpha$ բանաձևով:

գ)Քանի որ *քառակուսու* անկյունագծերը հավասար են և ուղղահայաց ($\alpha=90^0$ և $d_1=d_2=d$), ապա նրա մակերեսը հաշվվում է $S=\frac{1}{2}d^2$ բանաձևով:

(27) Հերոնի բանաձևը: Դիցուք a-ն, b-ն, c-ն ABC եռանկյան կողմերն են: Ապացուցենք, որ այդ եռանկյան S մակերեսը հաշվվում է $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ բանաձևով, որտեղ p-ն եռանկյան կիսապարագիծն է. $p=\frac{a+b+c}{2}$:

Ըստ եռանկյան մակերեսի մասին թեորեմի՝ $S=\frac{1}{2}ab\sin C$, որտեղից $\sin C=\frac{2S}{ab}$: Ըստ կոսինուսների թեորեմի՝ $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$, որտեղից $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$: Այժմ օգտվենք $\sin^2 C+\cos^2 C=1$ նույնությունից, ստանում ենք. $\frac{4S^2}{a^2b^2}+\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}=1$: Կատարենք ձևափոխություններ.

$$\begin{aligned}16S^2&=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=\\&=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)=\\&=((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)=\\&=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b):\end{aligned}$$

Նկատենք, որ $a+b+c=2p$, $a+b-c=2p-2c$, $c+a-b=2p-2b$, $c-a+b=2p-2a$: Ստանում ենք. $16S^2=2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)$:

Այսպիսով՝ $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$ և, ուրեմն՝

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}:$$

Այս բանաձևը հայտնի է հին հունական մաթեմատիկոս *Հերոնի* անունով (Հերոն Ալեքսանդրիացու ծննդյան և մահվան տարեթվերը հայտնի չեն, նա ապրել է, հավանաբար, մ.թ.ա. 1-ին կամ 2-րդ դարերում):

Մ ա ս ն ա վ ո ր դ և պ ք . a կողմով հավասարակողմ եռանկյան մակերեսը արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով.

$$S=\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}:$$

(28) Եռանկյան մակերեսի, կողմերի և արտագծյալ շրջանագծի շառավիղի կապը: Դիցուք ABC եռանկյան կողմերն են a-ն, b-ն, c-ն,

մակերեսը՝ S-ը, իսկ արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ R-ը: Ապացուցենք, որ $S = \frac{abc}{4R}$:   (3)

Իսկապես, ունենք $S=\frac{1}{2}absinC$: Ըստ սինուսների թեորեմի $\frac{c}{sin\,C} = 2R$, որտեղից $sin\,C = \frac{c}{2R}$: Տեղադրելով մակերեսի բանաձևի մեջ՝ ստանում ենք. $S = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

(3) բանաձևը թույլ է տալիս գտնել տրված կողմերով եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը:

Խ ն դ ի ր : Գտնել եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը, եթե տրված են նրա կողմերը՝ a=4, b=7, c=9:

Լ ու ծ ու մ : Նախ հաշվենք այդ եռանկյան մակերեսը՝ օգտվելով Հերոնի բանաձևից՝ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, որտեղ $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$:

Ստանում ենք. $p=\frac{1}{2}(4+7+9)=10$, և $S=\sqrt{10 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 1} = 6\sqrt{5}$:

Այժմ, օգտվելով (3) բանաձևից, ստանում ենք.

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 9}{6\sqrt{5}} = \frac{42}{\sqrt{5}} = 8{,}4\sqrt{5}:$$

Հարցեր և խնդիրներ

178. Գտեք շեղանկյան մակերեսը, եթե նրա կողմը հավասար է 12սմ, իսկ անկյունը՝ 60^0:

179. Գտեք շեղանկյան կողմը, եթե նրա մակերեսը հավասար է $8\sqrt{2}$ սմ^2, իսկ անկյունը՝ 45^0:

180. Գտեք զուգահեռագծի մակերեսը, եթե նրա անկյունագծերը հավասար են 10սմ և 8սմ, իսկ նրանցով կազմված անկյունը՝ 60^0:

181. Զուգահեռագծի մակերեսը 100սմ^2 է, պարագիծը՝ 60սմ, իսկ սուր անկյունը՝ 30^0: Գտեք նրա փոքր կողմի երկարությունը:

182. Շեղանկյան մակերեսը 30սմ^2 է, իսկ անկյունագծերից մեկը՝ 5սմ: Գտեք շեղանկյան բարձրությունը:

183. Ուղղանկյան անկյունագիծը 10սմ է, իսկ մակերեսը՝ 25սմ^2: Գտեք անկյունագծերով կազմված անկյունները:

184. Հավասարասրուն սեղանի անկյունագիծը հավասար է 18սմ և մեծ հիմքի հետ կազմում է 15^0 անկյուն: Գտեք սեղանի մակերեսը:

185. Քառանկյան անկյունագծերը փոխուղղահայաց են և ունեն 8սմ և 12սմ երկարություն: Գտեք այդ քառանկյանը հավասարամեծ քառակուսու կողմը:

186. Եռանկյան կողմերն են՝ 26սմ, 28սմ և 3դմ: Գտեք եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

187. $ABCD$ զուգահեռագծում $BC=3\sqrt{3}$ սմ, $\angle BAD=30^0$, $BD=BC$: Գտեք զուգահեռագծի մակերեսը:

188. Ապացուցեք, որ տրված անկյունագծով ուղղանկյուններից մեծագույն մակերեսն ունի քառակուսին:

189. Ապացուցեք, որ տրված անկյունագծերով զուգահեռագծերից մեծագույն մակերեսն ունի շեղանկյունը:

190. Ապացուցեք, որ տրված կողմերն ունեցող զուգահեռագծերից մեծագույն մակերեսն ունի ուղղանկյունը:

191. Գտեք հավասարասրուն սեղանի մակերեսը, եթե նրա հիմքերը հավասար են 12սմ և 20սմ, իսկ անկյունագծերը փոխուղղահայաց են:

192. Սեղանը անկյունագծերով տրոհվում է չորս եռանկյան: Ապացուցեք, որ դրանցից երկուսը, որոնք պարունակում են սեղանի ոչ զուգահեռ կողմերը, հավասարամեծ են:

ԳԼՈՒԽ XI-ի ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

1. Ի՞նչն է կոչվում ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյան սինուս, կոսինուս, տանգենս:

2. Ապացուցեք, որ եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը հավասար է մյուս ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյանը, ապա այդ անկյունների՝ սինուսները հավասար են, կոսինուսները հավասար են, տանգենսները հավասար են:

3. Ո՞ր հավասարությանն են անվանում եռանկյունաչափական հիմնական նույնություն:

4. Ինչի՞ են հավասար սինուսի, կոսինուսի և տանգենսի արժեքները 30^0, 45^0, 60^0 անկյունների դեպքում: Բացատրեք, թե ինչպես են գտնում այդ արժեքները:

5. Ինչպե՞ս են որոշում հատվածի միջնակետի կոորդինատները՝ ըստ ծայրակետերի կոորդինատների:

6. Արտածեք երկու կետերի հեռավորության բանաձևը՝ արտահայտված այդ կետերի կոորդինատներով:

7. Գծեք կոորդինատների առանցքները և կառուցեք միավոր կիսաշրջանագիծը: Բացատրեք, թե ինչպես կարելի է ստուգել՝ տրված $M(a,b)$ կետը գտնվու՞մ է այդ կիսաշրջանագծի վրա, թե՞ ոչ:

8. Բացատրեք, թե ինչ են $0^0<\alpha<180^0$ միջակայքի α անկյան սինուսը և կոսինուսը:

9. Ի՞նչն է կոչվում α անկյան տանգենս, և ի՞նչը՝ կոտանգենս: α-ի ո՞ր արժեքի համար տանգենսը որոշված չէ և ինչու՞:
10. Ապացուցեք եռանկյունաչափական հիմնական նույնությունը:
11. Գրեք բերման բանաձևերը:
12. Արտածեք այն բանաձևերը, որոնք ոչ բացասական օրդինատով A կետի կոորդինատներն արտահայտում են OA հատվածի երկարությամբ և OA ճառագայթի ու Ox դրական կիսառանցքի կազմած անկյան միջոցով:
13. Ձևակերպեք և ապացուցեք եռանկյան մակերեսի մասին թեորեմը (եռանկյան մակերեսի հաշվումը ըստ երկու կողմի ու դրանց կազմած անկյան):
14. Ձևակերպեք և ապացուցեք սինուսների թեորեմը:
15. Ձևակերպեք և ապացուցեք կոսինուսների թեորեմը:
16. Ի՞նչ է նշանակում «եռանկյան լուծում» բառակապակցությունը: Ձևակերպեք եռանկյան լուծման երեք հիմնական խնդիրները և բացատրեք, թե ինչպես են դրանք լուծվում:
17. Պարզաբանեք, թե ինչպես են որոշում առարկայի բարձրությունը, որի հիմքը անմատչելի է:
18. Բացատրեք, թե ինչպես են որոշում անմատչելի կետի հեռավորությունը:
19. Ինչպե՞ս են հաշվում զուգահեռագծի մակերեսը՝ նրա կից կողմերով և դրանց կազմած անկյունով:
20. Ինչպես են հաշվում քառանկյան մակերեսը՝ նրա անկյունագծերով և դրանց կազմած անկյունով:
21. Գրեք եռանկյան մակերեսի հաշվման՝ Հերոնի բանաձևը և այն արտածեք:
22. Գրեք և արտածեք այն բանաձևը, որով կապ է հաստատվում եռանկյան մակերեսի, կողմերի և արտագծյալ շրջանագծի շառավիղի միջև:

Լրացուցիչ խնդիրներ

193. ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ $AB=AC=b$, $\angle A=30^0$: Գտեք BE և AD բարձրությունները, ինչպես նաև AE, EC, BC հատվածները:

194. Գտեք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե **ա)** $BC=4{,}125$մ, $\angle B=44^0$, $\angle C=72^0$, **բ)** $BC=4100$մ, $\angle A=32^0$, $\angle C=120^0$:

195. Օգտագործելով սինուսների թեորեմը՝ լուծեք ABC եռանկյունը, եթե. **ա)** $AB=8$սմ, $\angle A=30^0$, $\angle B=45^0$, **բ)** $AB=5$սմ, $\angle B=45^0$, $\angle C=60^0$, **գ)** $AB=3$սմ, $BC=3{,}3$սմ, $\angle A=48^030$, **դ)** $AC=10{,}4$սմ, $BC=5{,}2$սմ, $\angle B=62^048$:

196. Օգտագործելով կոսինուսների թեորեմը՝ լուծեք ABC եռանկյունը, եթե. **ա)** AB=5սմ, AC=7,5սմ, $\angle A=135^0$, **բ)** $AB=2\sqrt{2}$ դմ, BC=3դմ, $\angle B=45^0$, **գ)** AC=0,6մ, $BC=\frac{\sqrt{3}}{4}$ դմ, $\angle C=150^0$:

197. ABC եռանկյան AB կողմը 15սմ է, իսկ AC կողմը՝ 10սմ: Կարո՞ղ է, արդյոք, լինել $\sin B=\frac{3}{4}$:

198. Եռանկյան երկու կողմերը հավասար են 5սմ և 6սմ: Կարո՞ղ է, արդյոք, 5սմ կողմի հանդիպակաց անկյունը լինել բութ:

199. $ABCD$ հավասարասրուն սեղանի մեջ (AD-ն և BC-ն հիմքերն են) $\angle BCA=\beta$, $\angle CDA=\alpha$, $AD=m$: Գտեք սեղանի մակերեսը:

200. ABC եռանկյանը ներգծած է շրջանագիծ, որի շառավիղը $2\sqrt{3}$ է, $\angle A=80^0$, $\angle C=40^0$: Գտեք AC-ն:

201. $ABCD$ զուգահեռագծի մեջ $AD=2$, $\angle BAD=60^0$, $BE\perp AD$, $BE=2\sqrt{3}$: Գտեք զուգահեռագծի մեծ անկյունագծի երկարությունը:

202. ABC եռանկյան AB կողմը 4սմ է, իսկ BC-ն՝ 5սմ: Եռանկյան մակերեսը $5\sqrt{3}$ սմ^2 է: Գտեք B գագաթից իջեցրած բարձրությունը, եթե $\cos B<0$:

203. DEF եռանկյան մեջ DE=4,5դմ, EF=9,9դմ, DF=70սմ: Գտեք եռանկյան անկյունները:

204. Գտեք ABC եռանկյան AD կիսորդը, եթե $\angle A=\alpha$, $AB=c$, $AC=b$:

205. Ապացուցեք, որ $A(3,0)$, $B(1,5)$, $C(2,1)$ գագաթներով եռանկյունը բութանկյուն եռանկյուն է:

206. Զուգահեռագծի սուր անկյունը 60^0 է: Գտեք զուգահեռագծի մակերեսը, եթե նրա կողմերի տարբերությունը 16սմ է, իսկ փոքր անկյունագիծը հավասար է19սմ:

207. Շրջանագծին ներգծած է քառանկյուն, որի երկու կից կողմերը միմյանց հետ կազմում են 60^0 անկյուն և ունեն 7սմ, 15սմ երկարություն: Գտեք քառանկյան մյուս երկու կողմերը, եթե նրանց տարբերությունը 1սմ է:

208. Զուգահեռագծի սուր անկյունը 60^0 է, իսկ անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը կողմերից՝ 3սմ և 4սմ: Հաշվեք զուգահեռագծի մակերեսը:

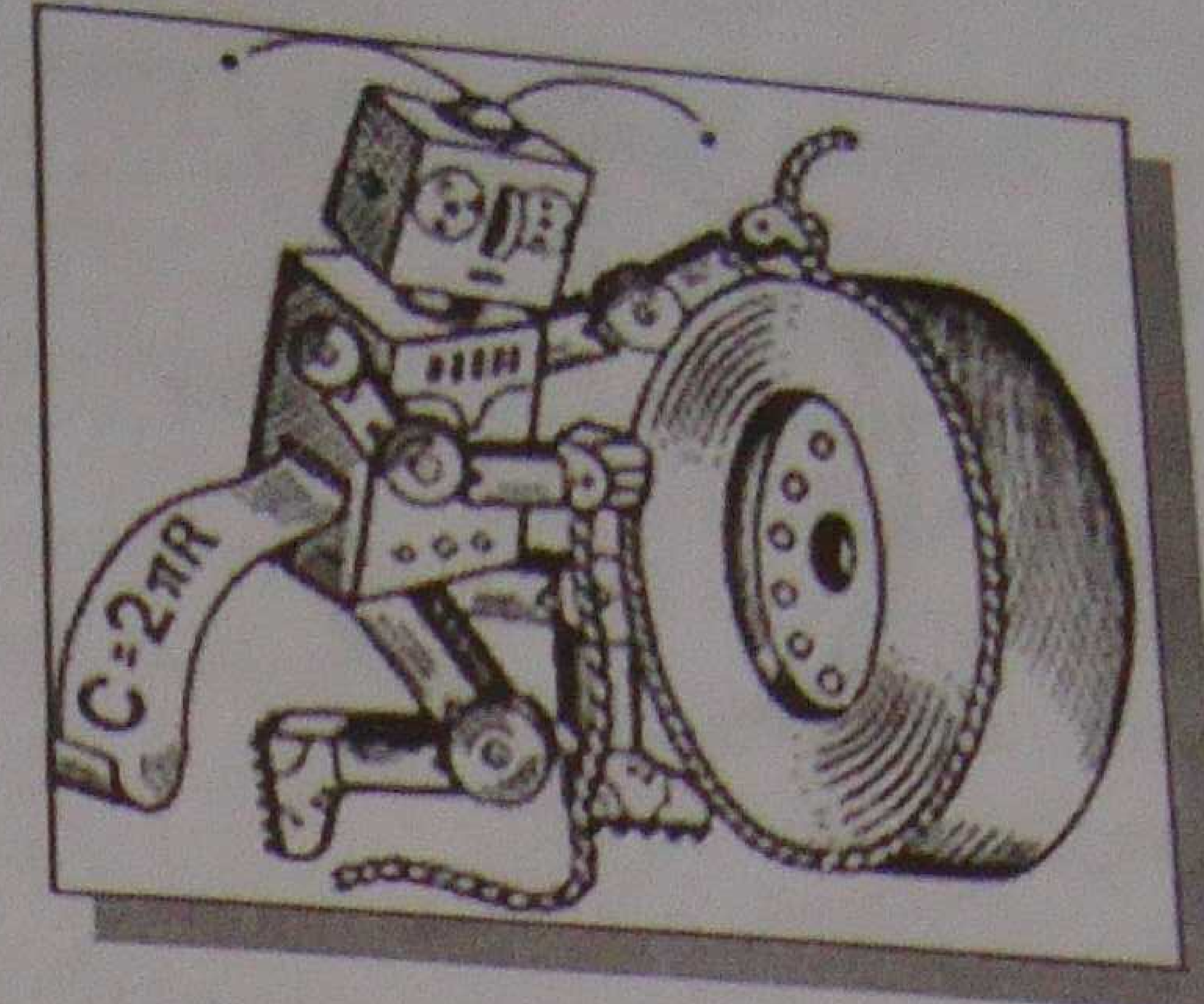
209. ABC եռանկյան մեջ AB=10սմ, $\angle B=74^0$, $\angle A=26^0$: Ապացուցեք, որ AC<10սմ:

210. $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյան մեջ հայտնի է, որ $\angle ABD=\angle ACD=45^0$, $\angle BAC=30^0$, $BC=a$: Գտեք AD-ն:

211. $ABCD$ քառանկյան մեջ $AB=CD=a$, $\angle BAD=\angle BCD=\alpha<90^0$, $BC\neq AD$: Գտեք քառանկյան պարագիծը:

ԳԼՈՒԽ XII

ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՇՐՋԱՆԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ



§ 1 ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

29 Կանոնավոր բազմանկյուն: *Կանոնավոր բազմանկյուն կոչվում է այն ուռուցիկ բազմանկյունը, որի բոլոր անկյունները հավասար են, և բոլոր կողմերը հավասար են:*

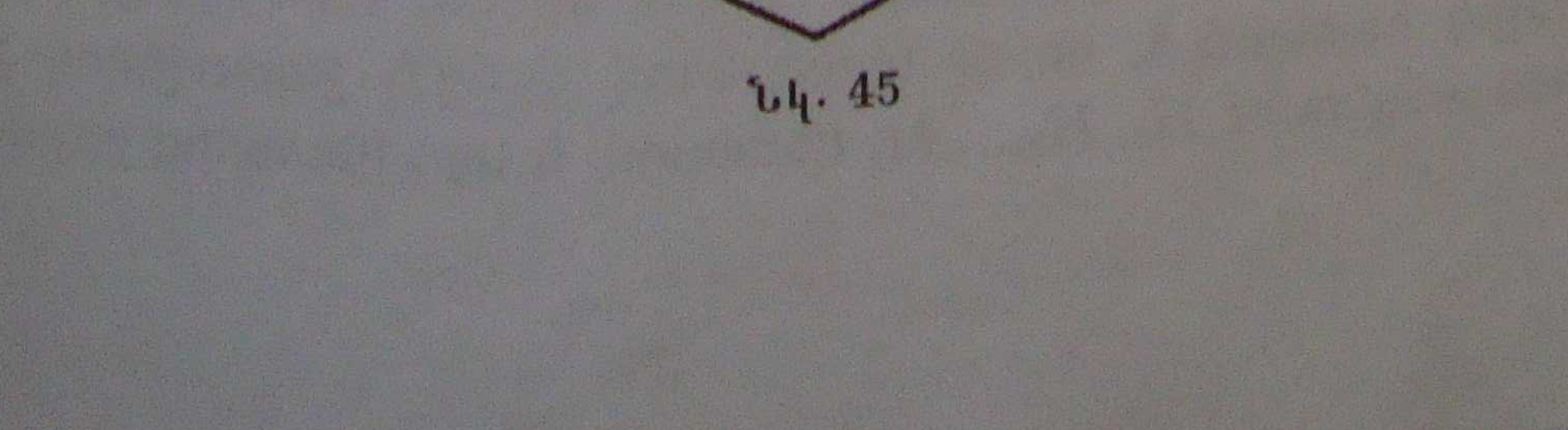
Կանոնավոր բազմանկյունների օրինակներ են հավասարակողմ եռանկյունը և քառակուսին: Նկար 45-ում պատկերված են կանոնավոր հնգանկյուն, յոթանկյուն և ութանկյուն:

Արտածենք կանոնավոր n-անկյան α_n անկյունը հաշվելու բանաձևը: Այդպիսի n-անկյուն բազմանկյան բոլոր անկյունների գումարը հավասար է $(n-2)\cdot180^0$: Քանի որ նրա բոլոր անկյունները հավասար են, ուստի՝

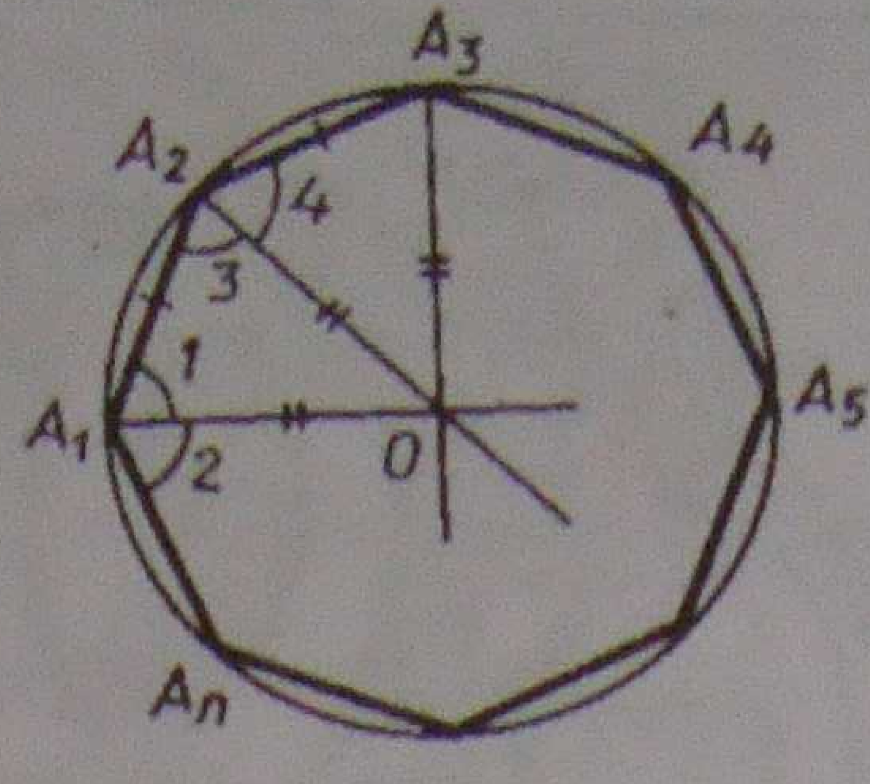
$$\alpha_n = \frac{(n-2)}{n}\cdot 180^0 :$$

30 Կանոնավոր բազմանկյանը արտագծած շրջանագիծ: Հիշենք, որ շրջանագիծը կոչվում է բազմանկյանն արտագծյալ, եթե բազմանկյան բոլոր գագաթները գտնվում են այդ շրջանագծի վրա: Ապացուցենք թեորեմ կանոնավոր բազմանկյանն արտագծած շրջանագծի մասին:

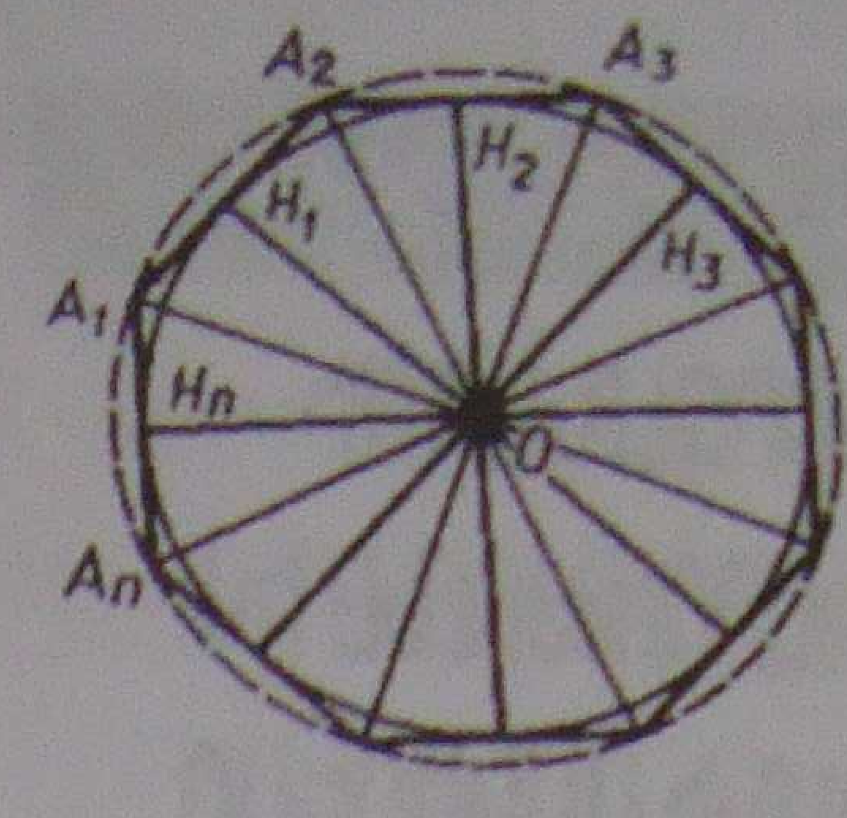
Թ ե ո ր ե մ : *Յանկացած կանոնավոր բազմանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ընդ որում՝ միայն մեկը:*



Նկ. 45



Նկ. 46



Նկ. 47

Ապացուցում: Դիցուք՝ $A_1A_2A_3 \ldots A_n$-ը կանոնավոր բազմանկյուն է, O-ն A_1 և A_2 անկյունների կիսորդների հատման կետն է (նկ. 46): O կետը հատվածներով միացնենք բազմանկյան մյուս գագաթներին և ապացուցենք, որ $OA_1=OA_2=\ldots=OA_n$: Քանի որ $\angle A_1=\angle A_2$, ապա $\angle 1=\angle 3$, ուստի A_1A_2O եռանկյունը հավասարասրուն է և, հետևաբար, $OA_1=OA_2$: Եռանկյուններ A_1A_2O-ն և A_3A_2O-ն հավասար են ըստ երկու կողմի և դրանց կազմած անկյան ($A_1A_2=A_3A_2$, A_2O-ն ընդհանուր կողմ է, և $\angle 3=\angle 4$): Հետևաբար՝ $OA_3=OA_1$: Համանման ձևով կարելի է ապացուցել, որ $OA_4=OA_2$, $OA_5=OA_3$ և այլն:

Այսպիսով՝ $OA_1=OA_2=\ldots=OA_n$, այսինքն՝ O կետը հավասարահեռ է բազմանկյան բոլոր գագաթներից: Ուստի՝ O կենտրոնով և OA_1 շառավիղով շրջանագիծը բազմանկյանը արտագծյալ շրջանագիծ է:

Այժմ ապացուցենք, որ արտագծյալ շրջանագիծը միայն մեկն է: Դիտարկենք բազմանկյան որևէ երեք գագաթ, ասենք՝ A_1-ը, A_2-ը, A_3-ը: Քանի որ երեք կետերով անցնում է միայն մեկ շրջանագիծ, ապա $A_1A_2 \ldots A_n$ բազմանկյանը կարելի է արտագծել միայն մեկ շրջանագիծ: Թեորեմն ապացուցված է:

(31) Կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած շրջանագիծ: Հիշենք, որ շրջանագիծը կոչվում է բազմանկյանը ներգծած, եթե բազմանկյան բոլոր կողմերը շոշափում են այդ շրջանագիծը: Ապացուցենք թեորեմ կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած շրջանագծի մասին:

Թեորեմ: *Յանկացած կանոնավոր բազմանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ, ընդ որում՝ միայն մեկը:*

Ապացուցում: Դիցուք $A_1A_2 \ldots A_n$-ը կանոնավոր բազմանկյուն է, O-ն նրա արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնն է (նկ. 47): Նախորդ թեորեմի ապացուցման ընթացքում մենք բացահայտեցինք, որ $\Delta OA_1A_2=\Delta OA_2A_3=\ldots=\Delta OA_nA_1$: Ուստի այդ եռանկյունների՝ O գագաթից տարված բարձրությունները հավասար են. $OH_1=OH_2=\ldots=OH_n$: Այստեղից հետևում է, որ O կենտրոնով և OH_1 շառավիղով շրջանագիծն անցնում է H_1, H_2,…,H_n կետերով, և այդ կետերից յուրաքան-

չյուրով տարված շառավիղն ուղղահայաց է բազմանկյան կողմին: Հետևաբար՝ այդ շրջանագիծը շոշափում է բազմանկյան կողմին: Իսկ դա նշանակում է, որ այդ շրջանագիծը ներգծյալ է բազմանկյանը:

Այժմ ապացուցենք, որ ներգծյալ շրջանագիծը միայն մեկն է: Ենթադրենք, թե O կենտրոնով և OH_1 շառավիղով շրջանագծից բացի կա ևս մեկ այլ շրջանագիծ, որը ներգծյալ է $A_1A_2...A_n$ բազմանկյանը: Այդ դեպքում նրա O_1 կենտրոնը հավասարահեռ է բազմանկյան կողմերից, այսինքն՝ O_1 կետը գտնվում է բազմանկյան յուրաքանչյուր անկյան կիսորդի վրա: Իսկ դրանից հետևում է, որ այն համընկնում է այդ կիսորդների հատման O կետին: Այդ շրջանագծի շառավիղը հավասար է O կետից մինչև բազմանկյան կողմերը եղած հեռավորությանը, այսինքն՝ այն հավասար է OH_1-ին: Այսպիսով՝ ենթադրվող երկրորդ շրջանագիծը համընկնում է առաջին շրջանագծին: Թեորեմն ապացուցված է:

Հ ե տ և ա ն ք 1 : *Կանոնավոր բազմանկյան ներգծյալ շրջանագիծը բազմանկյան կողմերը շոշափում է նրանց միջնակետում:*

Հ ե տ և ա ն ք 2 : *Կանոնավոր բազմանկյանն արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը համընկնում է այդ բազմանկյան ներգծյալ շրջանագծի կենտրոնին:*

Այդ կետը կոչվում է *կանոնավոր բազմանկյան կենտրոն:*

32 Կանոնավոր բազմանկյան մակերեսի, նրա կողմերի և ներգծյալ շրջանագծի շառավիղի հաշվման բանաձևեր:

Դիցուք՝ S-ը կանոնավոր n-անկյան մակերեսն է, a_n-ը՝ նրա կողմը, P-ն՝ պարագիծը, իսկ r-ը և R-ը համապատասխանաբար ներգծյալ և արտագծյալ շրջանագծերի շառավիղներն են: Նախ ապացուցենք, որ

$$S = \frac{1}{2}Pr: \qquad (1)$$

Իրոք, բազմանկյան կենտրոնը միացնենք նրա գագաթներին (տե՛ս նկ. 47): Այդ դեպքում բազմանկյունը տրոհվում է n հատ հավասար եռանկյունների, որոնցից յուրաքանչյուրի մակերեսը հավասար է $\frac{1}{2}a_n r$:Հետևաբար՝ $S = n \cdot \frac{1}{2}a_n r = \frac{1}{2}(na_n)\,r = \frac{1}{2}Pr:$

Այժմ արտածենք հետևյալ բանաձևերը.

$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}, \qquad (2)$$

$$r = R\cos\frac{180^0}{n}: \qquad (3)$$

Այս բանաձևերի արտածման համար օգտվենք նկար 47-ից: A_1H_1O ուղղանկյուն եռանկյան մեջ

$$\frac{\angle A_1}{2} = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{n-2}{2n} \cdot 180^0 = 90^0 - \frac{180^0}{n}:$$

Հետևաբար՝ $a_n = 2A_1H_1 = 2R\cos\left(90^0 - \frac{180^0}{n}\right) = 2R\sin\frac{180^0}{n}$, իսկ

$$r = OH_1 = R\sin\left(90^0 - \frac{180^0}{n}\right) = R\cos\frac{180^0}{n}:$$

(2) բանաձևի մեջ ընդունելով n=3, 4, 6, ստանում ենք արտահայտություններ՝ կանոնավոր եռանկյան, քառակուսու և կանոնավոր վեցանկյան կողմերի համար.

$$a_3 = 2R\sin\frac{180^0}{3} = 2R\sin 60^0 = 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}, \qquad (4)$$

$$a_4 = 2R\sin\frac{180^0}{4} = 2R\sin 45^0 = 2R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}, \qquad (5)$$

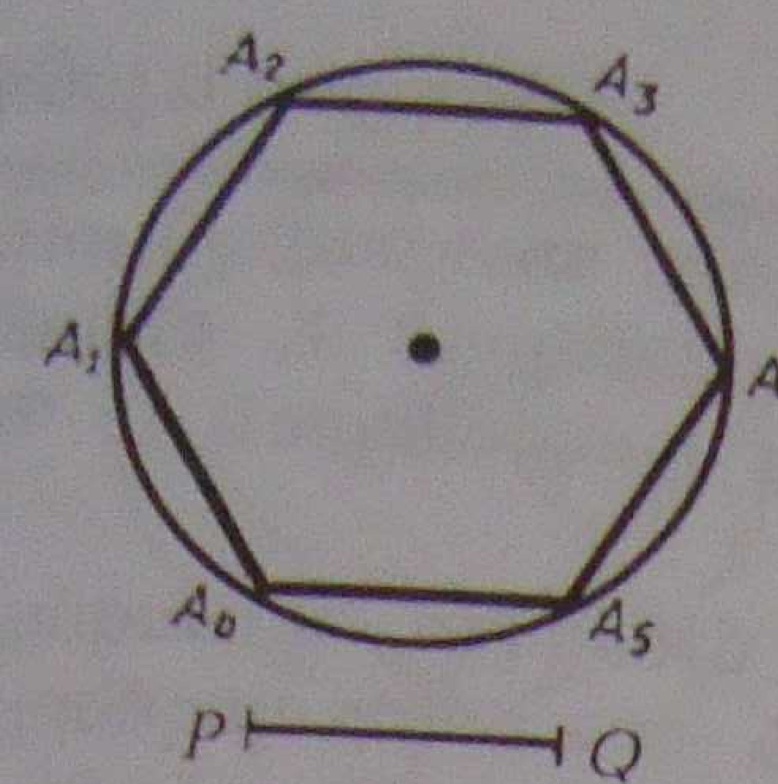
$$a_6 = 2R\sin\frac{180^0}{6} = 2R\sin 30^0 = 2R\cdot\frac{1}{2} = R: \qquad (6)$$

33 **Կանոնավոր բազմանկյունների կառուցումը:** Որոշ կանոնավոր բազմանկյունների համար դիտարկենք քանոնի և կարկինի օգնությամբ կառուցման եղանակներ: Կանոնավոր եռանկյան և կանոնավոր քառանկյան, այսինքն՝ քառակուսու կառուցումները դիտարկել ենք ավելի վաղ: n>4 դեպքում կանոնավոր n-անկյուն կառուցելու համար, սովորաբար, օգտագործում են բազմանկյանն արտագծած շրջանագիծը:

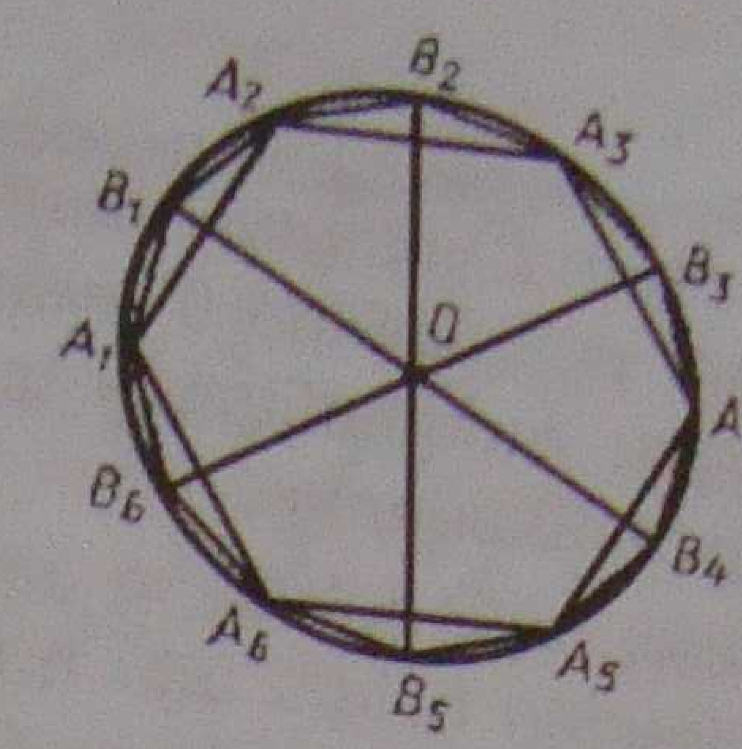
Խ ն դ ի ր 1 : *Կառուցել կանոնավոր վեցանկյուն, որի կողմը հավասար է տրված հատվածին:*

Լ ո ւ ծ ո ւ մ : Խնդիրը լուծելու համար օգտվում ենք (6) բանաձևից: Դիցուք՝ PQ-ն տրված հատվածն է: Կառուցենք PQ շառավիղով շրջանագիծ և նրա վրա նշենք կամայական A_1 կետը (նկ. 48): Այնուհետև, չփոխելով կարկինի բացվածքը, այդ շրջանագծի վրա կառուցում ենք A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 կետերն այնպես, որ տեղի ունենան $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5=A_5A_6$ հավասարությունները: Կառուցված կետերը հաջորդաբար միացնենք հատվածներով, ստանում ենք որոնելի $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ կանոնավոր վեցանկյունը:

Կանոնավոր բազմանկյուններ կառուցելիս հաճախ օգտագործվում է հետևյալ խնդիրը:



Նկ. 48



Նկ. 49

Խ ն դ ի ր 2 : *Տրված է կանոնավոր n-անկյուն: Կառուցել կանոնավոր $2n$-անկյուն:*

Լ ու ծ ու մ : Դիցուք՝ $A_1A_2\ldots A_n$-ը տրված կանոնավոր n-անկյունն է: Նրան արտագծենք շրջանագիծ: Դրա համար կառուցենք A_1 և A_2 անկյունների կիսորդները և O տառով նշանակենք նրանց հատման կետը: Այնուհետև տանենք O կենտրոնով և OA_1 շառավիղով շրջանագիծ (տե՛ս նկ. 46):

Խնդիրը լուծելու համար բավական է կիսել A_1A_2, A_2A_3,…,A_nA_1 աղեղները և բաժանման այդ $B_1,B_2,\ldots,B_n$ կետերը հատվածներով միացնել համապատասխան աղեղի ծայրակետերին (նկ. 49, այս նկարում n=6): $B_1,B_2,\ldots,B_n$ կետերի կառուցման համար կարելի է օգտվել նաև տվյալ n-անկյան կողմերի միջնուղղահայացներից:

Նկար 49-ում այդ եղանակով կառուցված է կանոնավոր տասներկուանկյուն՝ $A_1B_1A_2B_2\ldots A_6B_6$-ը:

Նշված եղանակը կիրառելով՝ կարելի է քանոնի և կարկինի օգնությամբ կառուցել մի շարք կանոնավոր բազմանկյուններ, եթե արդեն կառուցված է դրանցից մեկը: Օրինակ՝ կառուցելով կանոնավոր քառանկյունը, այսինքն՝ քառակուսին, և օգտվելով խնդիր 2-ից, կարելի է կառուցել կանոնավոր ութանկյուն, այնուհետև՝ կանոնավոր տասնվեցանկյուն և, առհասարակ, կանոնավոր 2^k-անկյուն, որտեղ k-ն 2-ից մեծ կամայական ամբողջ թիվ է:

Պ ա ր զ ա բ ա ն ու մ : Դիտարկված օրինակները ցույց են տալիս, որ կանոնավոր բազմանկյուններից շատերը կարելի է կառուցել քանոնի և կարկինի օգնությամբ: Սակայն պարզվում է, որ ոչ բոլոր կանոնավոր բազմանկյունների համար է հնարավոր այդպիսի կառուցումը: Ապացուցված է, որ, օրինակ, կարկինի և քանոնի միջոցով կանոնավոր յոթանկյուն չի կարող կառուցվել: Հետաքրքրական է, որ կանոնավոր տասնյոթանկյունը այդ գործիքներով կարելի է կառուցել:

212. Ճշմարի՞տ է, արդյոք, հետևյալ պնդումը. **ա**)յուրաքանչյուր կանոնավոր բազմանկյուն ուռուցիկ բազմանկյուն է, **բ**)ցանկացած ուռուցիկ բազմանկյուն կանոնավոր բազմանկյուն է: Պատասխանը հիմնավորեք:

213. Հետևյալ պնդումներից որո՞նք են ճշմարիտ. **ա**)բազմանկյունը կանոնավոր է, եթե այն ուռուցիկ է և նրա բոլոր կողմերը հավասար են, **բ**)եռանկյունը կանոնավոր է, եթե նրա բոլոր անկյունները հավասար են, **գ**)ցանկացած հավասարակողմ եռանկյուն կանոնավոր եռանկյուն է, **դ**)հավասար կողմերով յուրաքանչյուր քառանկյուն կանոնավոր քառանկյուն է: Պատասխանը հիմնավորեք:

214. Ապացուցեք, որ յուրաքանչյուր կանոնավոր քառանկյուն քառակուսի է:

215. Գտեք կանոնավոր n-անկյան անկյունները, եթե. **ա**)$n=3$, **բ**)$n=5$, **գ**)$n=6$, **դ**)$n=10$, **ե**)$n=18$:

216. Ինչի՞ է հավասար կանոնավոր n-անկյան արտաքին անկյունների գումարը, եթե յուրաքանչյուր գագաթում վերցված է մեկական արտաքին անկյուն:

217. Քանի՞ կողմ ունի կանոնավոր բազմանկյունը, եթե նրա յուրաքանչյուր անկյունը հավասար է. **ա**)60^0, **բ**)90^0, **գ**)135^0, **դ**)150^0:

218. Քանի՞ կողմ ունի կանոնավոր ներգծյալ բազմանկյունը, եթե արտագծյալ շրջանագծի աղեղը, որ ձգվում է նրա կողմով, հավասար է. **ա**)60^0, **բ**)30^0, **գ**)90^0, **դ**)36^0, **ե**)18^0, **զ**)72^0:

219. Քանի՞ կողմ ունի կանոնավոր բազմանկյունը, եթե արտաքին անկյուններից յուրաքանչյուրը հավասար է. **ա**)36^0, **բ**)24^0:

220. Կանոնավոր վեցանկյան փոքր անկյունագիծը հավասար է a-ի: Գտեք վեցանկյան կողմը և մեծ անկյունագիծը:

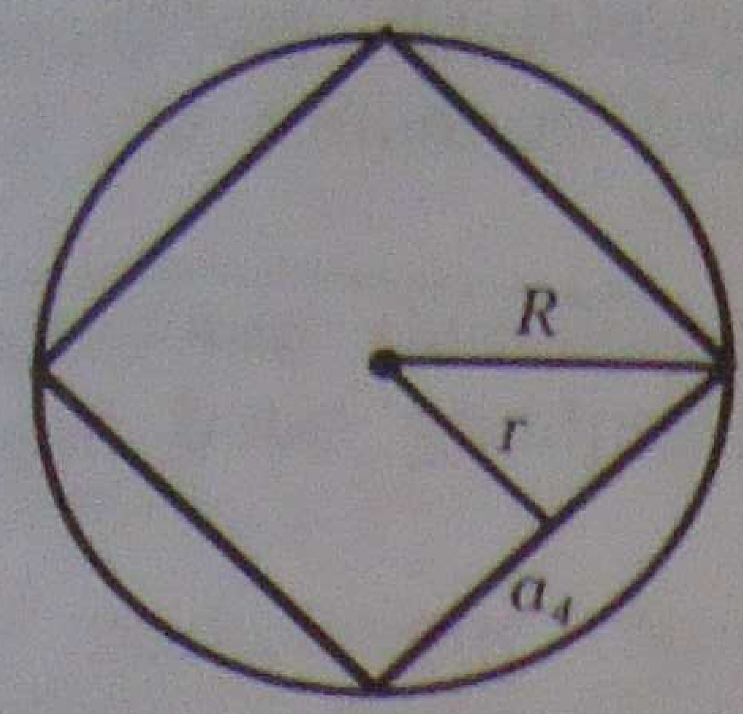
221. Կանոնավոր վեցանկյան կողմը հավասար է b-ի: Գտեք նրա անկյունագծերը:

222. Կանոնավոր բազմանկյանն արտագծած է շրջանագիծ, որի շառավիղը հավասար է R-ի: Բազմանկյան կենտրոնը նրա կողմերից հեռացված են $\frac{R}{2}$-ի չափով: Ինչի՞ է հավասար այդ բազմանկյան կողմերի թիվը:

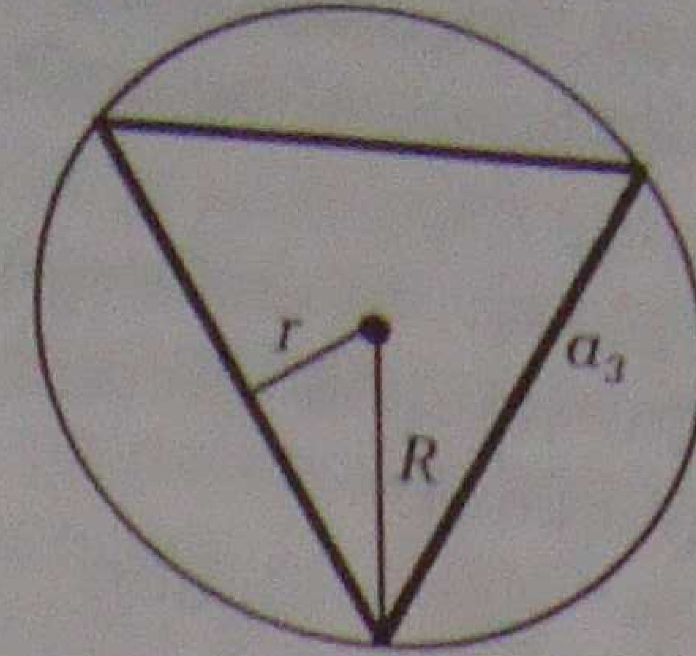
223. Ապացուցեք, որ $ABCDE$ կանոնավոր հնգանկյան AC և AD անկյունագծերը BAE անկյունը տրոհում են երեք հավասար մասերի:

224. Ապացուցեք, որ կանոնավոր բազմանկյան երկու հատվող անկյունագծերի հատվածների արտադրյալները իրար հավասար են:

225. Ապացուցեք, որ կանոնավոր եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը երկու անգամ մեծ է ներգծած շրջանագծի շառավիղից:



ա)



բ)

Նկ. 50

226. Շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկյան կողմը հավասար է a-ի: Գտեք այդ շրջանագծին ներգծած քառակուսու կողմը:

227. Կանոնավոր եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը $\sqrt{3}$ սմ է: Գտեք եռանկյան պարագիծը և մակերեսը:

228. Կանոնավոր վեցանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը $2\sqrt{3}$ սմ է: Գտեք վեցանկյան պարագիծը և մակերեսը:

229. 50,ա նկարում պատկերված է R շառավիղով շրջանագծին ներգծած քառակուսի: Աղյուսակն արտագծեք տետրում և լրացրեք դատարկ վանդակները (a_4-ը քառակուսու կողմն է, P-ն՝ քառակուսու պարագիծը, S-ը՝ նրա մակերեսը, r-ը՝ ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը):

N	R	r	a_4	P	S
1			6		
2		2			
3	4				
4				28	
5					16

230. 50,բ նկարում պատկերված է R շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկյուն: Աղյուսակն արտագծեք տետրում և լրացրեք դատարկ վանդակները (a_3-ը եռանկյան կողմն է, P-ն՝ եռանկյան պարագիծը, S-ը՝ նրա մակերեսը, r-ը՝ ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը):

N	R	r	a_3	P	S
1	3				
2					10
3		2			
4			5		
5				6	

231. Ապացուցեք, որ կանոնավոր բազմանկյան ցանկացած երկու կողմերի միջնուղղահայացները կա՛մ հատվում են, կա՛մ համընկնում:

232. Ապացուցեք, որ կանոնավոր բազմանկյան ցանկացած երկու անկյան կիսորդներն ընդգրկող ուղիղները կա՛մ հատվում են, կա՛մ համընկնում:

233. Կանոնավոր վեցանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը $2\sqrt{3}$ սմ է: Գտեք վեցանկյան անկյունագծերը:

234. Շրջանագծին արտագծած են քառակուսի և կանոնավոր վեցանկյուն: Գտեք քառակուսու պարագիծը, եթե վեցանկյան պարագիծը 48սմ է:

235. Գազի փականի գլխիկի հատույթն ունի 3սմ կողմով կանոնավոր եռանկյան ձև: Առնվազն որքա՞ն պետք է լինի այն կլոր մետաղաձողի տրամագիծը, որից պատրաստելու են փականը:

236. Հեղույսի վերին հիմքն ունի կանոնավոր վեցանկյան ձև, որի զուգահեռ կողմերի հեռավորությունը 1,5սմ է: Գտեք վերին հիմքի մակերեսը:

237. Կանոնավոր եռանկյան, քառակուսու և կանոնավոր վեցանկյան կողմերը հավասար են իրար: Գտեք այդ բազմանկյունների մակերեսների հարաբերությունները:

238. Գտեք շրջանագծին ներգծած և արտագծած կանոնավոր վեցանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

239. $A_1A_2 \ldots A_8$ կանոնավոր ութանկյունը ներգծված է R շառավիղով շրջանագծին: Ապացուցեք, որ $A_3A_4A_7A_8$ քառանկյունը ուղղանկյուն է, և նրա մակերեսը արտահայտեք R-ով:

240. Կարկինի և քանոնի միջոցով՝ տրված շրջանագծին ներգծեք. **ա**)կանոնավոր վեցանկյուն, **բ**)կանոնավոր եռանկյուն, **գ**)քառակուսի, **դ**)կանոնավոր ութանկյուն:

241. Կարկինի և քանոնի օգնությամբ՝ տրված շրջանագծին ներգծեք կանոնավոր տասներկուանկյուն:

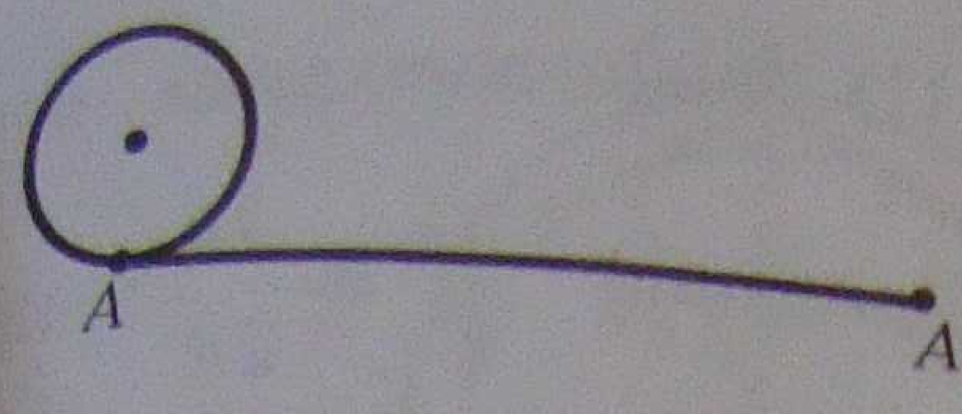
242. Ապացուցեք, որ շրջանագծին ներգծած բոլոր եռանկյուններից մեծագույն պարագիծն ունի կանոնավոր եռանկյունը:

§ 2 ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՇՐՋԱՆԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

34 Շրջանագծի երկարությունը:

Շրջանագծի երկարության մասին ակնառու պատկերացում ունենալու համար ընդունենք, որ շրջանագիծը պատրաստված է նուրբ և չձգվող թելից: Եթե մենք թելը կտրենք ինչ որ A կետում և այն ուղղենք,

ապա կստանանք AA_1 հատված (նկ. 51): Հենց այդ հատվածի երկարությունն էլ կլինի շրջանագծի երկարությունը:



Նկ. 51

Շրջանագծին ներգծած յուրաքանչյուր կանոնավոր բազմանկյան պարագիծը շրջանագծի երկարության մոտավոր արժեք է: Որքան մեծ է այդ բազմանկյան կողմերի թիվը, այնքան ավելի ճշգրիտ է այդ մոտավոր արժեքը: Բանն այն է, որ բազմանկյան կողմերի թիվը ավելացնելիս այն ավելի ու ավելի կիպ է «հպվում» շրջանագծին (նկ. 52): Այսպիսով՝ շրջանագծին «հասնելու» համար անհրաժեշտ է նրան ներգծած կանոնավոր բազմանկյան կողմերի թիվը ավելացնել, հետո դարձյալ ավելացնել և այդպես շարունակ: Շրջանագծի երկարության ճշգրիտ արժեքը այն սահմանն է, որին «ձգտում է» նրան ներգծած կանոնավոր բազմանկյան պարագիծը, եթե այդ բազմանկյան կողմերի թիվն ավելանում է անսահմանափակ ձևով:

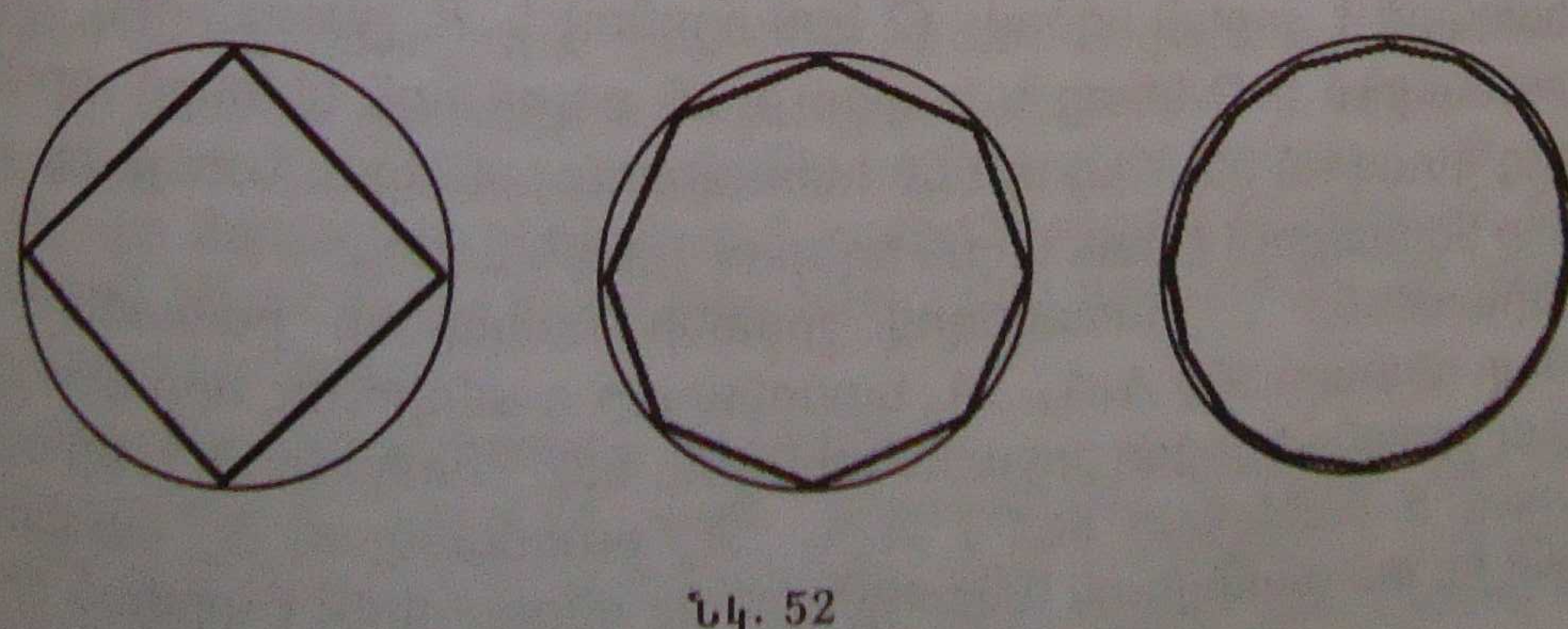
Արտածենք մի բանաձև, որը շրջանագծի երկարությունն արտահայտում է նրա շառավիղով:

Դիցուք՝ C-ն և C-ը R և R շառավիղներով շրջանագծերի երկարություններն են: Շրջանագծերից յուրաքանչյուրին ներգծենք կանոնավոր n-անկյուն: Դրանց պարագծերը նշանակենք P_n և P_n, իսկ կողմերը՝ a_n և a_n: Օգտվենք նախորդ պարագրաֆի (2) բանաձևից, ստանում ենք.

$$P_n=n\cdot a_n=n\cdot 2R\sin\frac{180^0}{n}, \qquad P_n=n\cdot a_n=n\cdot 2R\sin\frac{180^0}{n}:$$

Հետևաբար՝
$$\frac{P_n}{P_n}=\frac{2R}{2R} \qquad (1)$$

Այս հավասարությունը տեղի ունի n-ի ցանկացած արժեքի դեպքում: Այժմ n թիվը անսահմանափակորեն մեծացնենք: Քանի որ $n\to\infty$ դեպքում $P_n\to C$ և $P_n\to C$, ապա $\frac{P_n}{P_n}$ հարաբերության սահմանը



Նկ. 52

հավասար է $\frac{C}{C}$: Մյուս կողմից, ըստ (1) հավասարության, այդ հարաբերությունը հավասար է $\frac{2R}{2R}$: Այսպիսով՝ $\frac{C}{C} = \frac{2R}{2R}$: Այս հավասարությունից հետևում է, որ $\frac{C}{2R} = \frac{C}{2R}$: Սա նշանակում է, որ *յուրաքանչյուր շրջանագծի երկարության և իր տրամագծի հարաբերությունը միևնույն թիվն է բոլոր շրջանագծերի համար:* Ընդունված է այդ թիվը նշանակել հունական այբուբենի π տառով (կարդացվում է «պի»):

$\frac{C}{2R} = \pi$ հավասարությունից ստանում ենք R շառավիղով շրջանագծի երկարությունը հաշվելու բանաձևը՝ $C=2\pi R$:

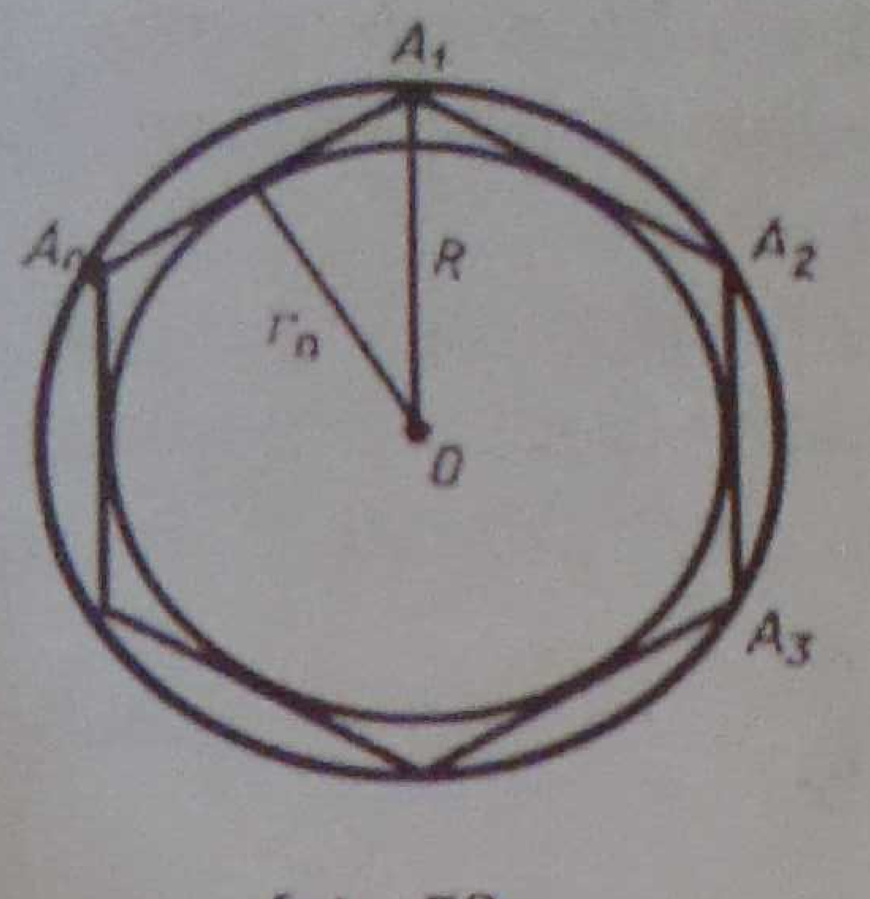
Ապացուցված է, որ π թիվը անվերջ՝ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակ է, այսինքն այն իռացիոնալ թիվ է: π թվի մոտավոր արժեք է $\frac{22}{7}$ ռացիոնալ թիվը, որն ունի 0,002 ճշգրտություն: Ուշագրավ է այն փաստը, որ այդ մոտավոր թիվը դեռևս մ.թ.ա. 3-րդ դարում հայտնաբերել է հույն մեծանուն գիտնական *Արքիմեդը*: Գործնականում խնդիրներ լուծելիս, սովորաբար, օգտվում են π=3,14 մոտավոր արժեքից, որն էլ ունի 0,01 ճշգրտություն:

Այժմ արտածենք շրջանագծի՝ α աստիճանային չափ ունեցող աղեղի ℓ երկարության հաշվման բանաձևը: Քանի որ ամբողջ շրջանագծի երկարությունը հավասար է $2\pi R$, ապա 1° աղեղի երկարությունը հավասար է $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$: Ուստի՝ ℓ երկարությունն արտահայտվում է $\ell = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$ բանաձևով:

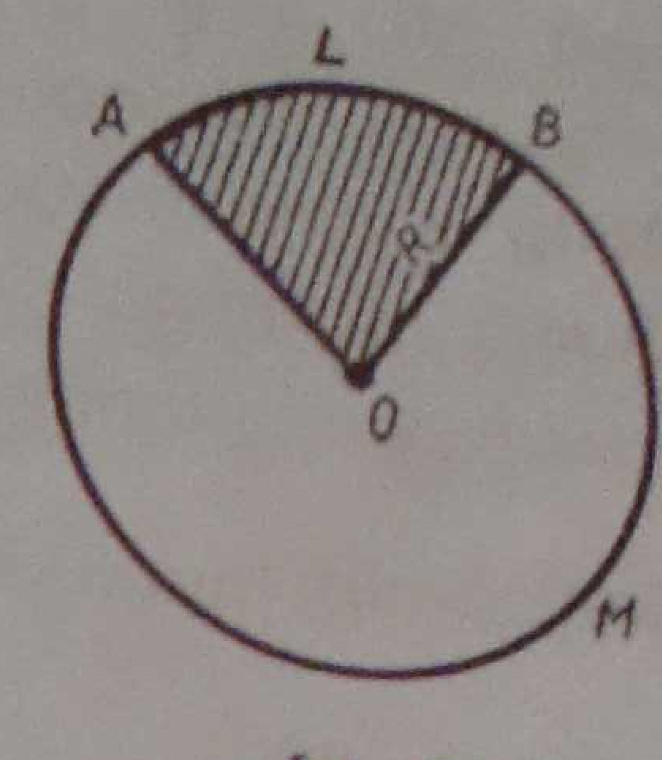
(35) Շրջանի մակերեսը:

Հիշենք, որ *շրջան* կոչվում է հարթության այն մասը, որը սահմանափակված է շրջանագծով: O կենտրոնով և R շառավիղով շրջանը պարունակում է O կետը և հարթության բոլոր այն կետերը, որոնք O կետից գտնվում են R-ից ոչ մեծ հեռավորության վրա: Նշենք, որ շրջանի մեջ ներառվում է նաև նրան եզերող շրջանագիծը:

Արտածենք R շառավիղով շրջանի մակերեսի բանաձևը: Դրա համար դիտարկենք $A_1A_2 \ldots A_n$ կանոնավոր n-անկյունը, որը ներգծած է տվյալ շրջանը եզերող շրջանագծին (նկ. 53): Հասկանալի է, որ տրված շրջանի S մակերեսը մեծ է $A_1A_2 \ldots A_n$ բազմանկյան S_n մակերեսից, քանի որ բազմանկյունն ամբողջությամբ ընդգրկվում է տրված շրջանի



Նկ. 53



Նկ. 54

մեջ: Մյուս կողմից՝ այդ բազմանկյանը ներգծած շրջանի S_n մակերեսը ավելի փոքր է, քան S_n-ը, քանի որ այդ երկրորդ շրջանը, իր հերթին, ամբողջությամբ ընդգրկված է բազմանկյան մեջ:

Այսպիսով՝ $S_n < S_n < S$: (2)

Այժմ անսահմանափակորեն ավելացնենք բազմանկյան կողմերի թիվը: Ըստ §1-ի (3) բանաձևի՝ ունենք $r_n = R\cos\dfrac{180^0}{n}$, որտեղ r_n-ը բազմանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղն է: Երբ n-ը անսահմանորեն մեծանում է, $\dfrac{180^0}{n}$ կոտորակը «ձգտում է» 0-ի: Հետևաբար՝ $n\to\infty$ դեպքում $\cos\dfrac{180^0}{n}\to 1$ և, ուրեմն, $r_n\to R$: Այլ խոսքով՝ բազմանկյան կողմերի թիվը անսահմանորեն ավելանալիս նրա ներգծյալ շրջանագիծը «ձգտում է» արտագծյալ շրջանագծին: Ուստի՝ $n\to\infty$ դեպքում $S_n\to S$:

Ըստ §1-ի (1) բանաձևի՝ $S_n = \dfrac{1}{2}P_n r_n$, որտեղ P_n-ը $A_1A_2\ldots A_n$ բազմանկյան պարագիծն է: Հաշվի առնենք, որ $n\to\infty$ դեպքում $P_n\to 2\pi R$ և $S_n\to S$: Ստանում ենք. $S = \dfrac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot R = \pi R^2$: Այսպիսով՝ R շառավիղով շրջանի մակերեսը հաշվելու համար ստանում ենք հետևյալ բանաձևը՝

$$S=\pi R^2:$$

Պ ա ր զ ա բ ա ն ո ւ մ : Դարեր շարունակ շատ մաթեմատիկոսներ ջանքեր էին գործադրում, որպեսզի լուծեն մի խնդիր, որը հայտնի է *շրջանի քառակուսացման խնդիր* անվանումով: Իսկ խնդիրը հետևյալն էր. քանոնի և կարկինի օգնությամբ կառուցել մի քառակուսի, որի մակերեսը հավասար է տրված շրջանի մակերեսին: Ի վերջո միայն 19-րդ դարի ավարտին հաջողվեց ապացուցել, որ այդպիսի կառուցումն անհնար է:

36 Շրջանային սեկտորի մակերեսը:

Շրջանային սեկտոր կամ, պարզապես, *սեկտոր* կոչվում է շրջանի այն մասը, որը սահմանափակված է աղեղով և այդ աղեղի ծայրակետերը շրջանի կենտրոնին միացնող երկու շառավիղով: Աղե-

ղը, որ եզերում է սեկտորը, կոչվում է *սեկտորի աղեղ:* Նկար 54-ում պատկերված են ALB և AMB աղեղներով երկու սեկտոր: Այդ սեկտորներից առաջինը ստվերագծված է:

Արտածենք α աստիճանային չափի աղեղով եզերված, R շառավիղով շրջանային սեկտորի S մակերեսը հաշվելու բանաձևը: Քանի որ ամբողջ շրջանի մակերեսը հավասար է πR^2, ապա 1^0 աղեղով եզերված սեկտորի մակերեսը հավասար է $\frac{\pi R^2}{360}$: Ուստի՝ S մակերեսն արտահայտվում է $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$ բանաձևով:

37 Սեգմենտի մակերեսը:

Սեգմենտ կոչվում է շրջանի այն մասը, որը սահմանափակված է աղեղով և այդ աղեղի ծայրակետերը միացնող լարով: 55.ա նկարում O կենտրոնով շրջանը AB լարով տրոհված է երկու սեգմենտի: Դրանցից մեկը, որին եզերում է 180^0-ից փոքր AMB աղեղը, ստվերագծված է: Այդ սեգմենտի $S_{սգ}$ մակերեսը կարող ենք ստանալ, եթե նույն աղեղով եզերված սեկտորի $S_{սկ}$ մակերեսից հանենք AOB եռանկյան S_Δ մակերեսը (նկ. 55.բ).

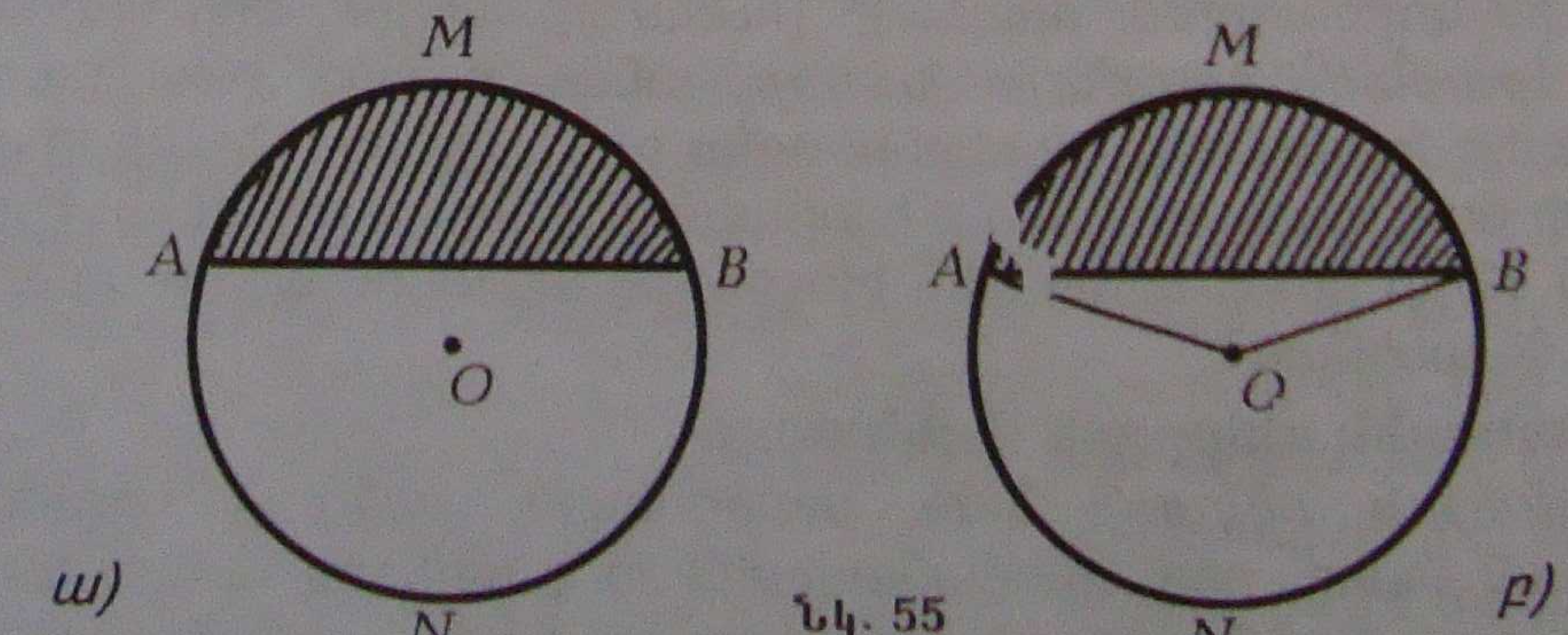
$$S_{սգ}=S_{սկ}-S_\Delta:$$

Նույն եղանակով է հաշվվում ANB աղեղով եզերված սեգմենտի մակերեսը՝ սակայն մի տարբերությամբ: Դժվար չէ նկատել, որ այդ դեպքում, երբ աղեղի աստիճանային չափը մեծ է 180^0-ից, սեգմենտի մակերեսը հավասար է սեկտորի մակերեսի և եռանկյան մակերեսի գումարին. $S_{սգ}=S_{սկ}+S_\Delta$:

Այսպիսով, R շառավիղով շրջանի՝ α աստիճանային չափ ունեցող աղեղով եզերված սեգմենտի մակերեսը հաշվում են հետևյալ բանաձևով.

$$S_{սգ} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha \pm S_\Delta,$$

որտեղ «+» նշանը դրվում է՝ եթե $\alpha > 180^0$, իսկ եթե $\alpha < 180^0$, ապա դրվում է «-» նշանը: Ինչ վերաբերում է $\alpha = 180^0$ աղեղով եզերված սեգմենտին՝ այն կարելի է դիտել որպես կիսաշրջան, կամ որպես սեկտոր, որի մակերեսը $\frac{\pi R^2}{2}$ է:



Նկ. 55

243. Հաշվեք շրջանագծի երկարությունը, եթե շառավիղը հավասար է. **ա)**10մ, **բ)**15մ, **գ)**35մ:

244. Հաշվեք շառավիղը, եթե շրջանագծի երկարությունը հավասար է. **ա)**1մ, **բ)**25սմ, **գ)**4,75դմ: Օգտվեք π=3,14 արժեքից:

245. Որոշեք շրջանագծի երկարությունը, եթե նրան ներգծած կանոնավոր վեցանկյան պարագիծը 24սմ է:

246. Արտագծեք աղյուսակը և, օգտագործելով R շառավիղով շրջանագծի C երկարության բանաձևը, լրացրեք աղյուսակի դատարկ վանդակները: Օգտվեք π=3,14 արժեքից:

C			82	18π		6,28			$2\sqrt{2}$
R	4	3			0,7		101,5	$2\frac{1}{3}$	

247. Ինչպե՞ս կփոխվի շրջանագծի երկարությունը, եթե շրջանագծի շառավիղը. **ա)**մեծացվի երեք անգամ, **բ)**փոքրացվի երկու անգամ, **գ)**մեծացվի k անգամ, **դ)**փոքրացվի k անգամ:

248. Ինչպե՞ս կփոխվի շրջանագծի շառավիղը, եթե շրջանագծի երկարությունը. **ա)**մեծացվի k անգամ, **բ)**փոքրացվի k անգամ:

249. Որոշեք շրջանագծի շառավիղը, եթե շրջանագիծն իր տրամագծից 107սմ-ով երկար է:

250. Գտեք այն շրջանագծի երկարությունը, որը ներգծված է. **ա)**a կողմով քառակուսուն, **բ)**c ներքնաձիգով հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյանը, **գ)**c ներքնաձիգով և α սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյանը, **դ)**հիմքին առընթեր α անկյունով և հիմքին տարված h բարձրությամբ հավասարասրուն եռանկյանը:

251. Շոգեքարշն անցավ 1413մ: Գտեք շոգեքարշի անիվի տրամագիծը, եթե հայտնի է, որ այն կատարել է 300 պտույտ:

252. Գտեք Երկրի արհեստական արբանյակի շրջանային ուղեծրի երկարությունը, եթե արբանյակը պտտվում է Երկրից 320կմ հեռավորության վրա, իսկ Երկրի շառավիղը հավասար է 6370կմ:

253. Երկաթուղագծի կորության շառավիղը հավասար է 1200մ, աղեղի երկարությունը՝ 450մ: Գտեք այդ աղեղի աստիճանային չափը:

254. Շրջանագիծը, որի շառավիղը 2սմ է, վերածված է մի շրջանային աղեղի, որի շառավիղը հավասար է 5սմ: Գտեք ստացված կենտրոնային անկյունը:

255. 4սմ շառավիղ ունեցող շրջանային աղեղը, որի աստիճանային չափը 120^0 է, հավասար է մեկ այլ շրջանագծի երկարությանը: Գտեք այդ շրջանագծի շառավիղը:

256. Շրջանագիծը, որի շառավիղն է 6սմ, բացված է աղեղի ձևով: Գտեք այդ աղեղի շառավիղը, եթե նրա կենտրոնային անկյունը հավասար է 300^0:

257. Տրված a լարով որոշեք նրա ձգած աղեղի երկարությունը, եթե վերջինիս աստիճանային չափը հավասար է. **ա)**60^0, **բ)**90^0, **գ)**120^0:

258. 120^0 աստիճանային չափ ունեցող AB աղեղի ծայրերից շրջանագծին տարված են շոշափողներ, որոնք հատվում են C կետում: Ստացված ACB անկյանը ներգծված է այնպիսի շրջանագիծ, որն այդ աղեղի հետ ունի արտաքին շոշափում: Ապացուցեք, որ այդ շրջանագծի երկարությունը հավասար է տրված AB աղեղի երկարությանը:

259. Գտեք պատի ժամացույցի ճոճանակի երկարությունը, եթե նրա ճոճման անկյունը կազմում է 38^0, իսկ աղեղի երկարությունը, որը գծում է ճոճանակի ծայրը, հավասար է 24սմ:

260. Երկաթուղային պաստառի կլորացման շառավիղը հավասար է 5կմ, իսկ կլորացման աղեղի երկարությունը՝ 400մ: Որքա՞ն է կլորացման աղեղի աստիճանային չափը:

261. Արտագծեք աղյուսակը և, օգտագործելով R շառավիղով շրջանի S մակերեսի բանաձևը, լրացրեք դատարկ վանդակները: Օգտվեք π=3,14 արժեքից:

S			9		49π			6,25
R	2	5		$\frac{2}{7}$		54,3	$\sqrt{3}$	

262. Ինչպե՞ս կփոխվի շրջանի մակերեսը, եթե նրա շառավիղը. **ա)**մեծացվի k անգամ, **բ)**փոքրացվի k անգամ:

263. Գտեք այն շրջանի մակերեսը, որը եզերող շրջանագիծն արտագծված է. **ա)**a և b կողմերով ուղղանկյանը, **բ)**a էջով և դիմացի α անկյունով ուղղանկյուն եռանկյանը, **գ)**a հիմքով և հիմքին տարված h բարձրությամբ հավասարասրուն եռանկյանը:

264. Գտեք այն շրջանի մակերեսը, որը եզերող շրջանագիծը ներգծված է. **ա)**a կողմով հավասարակողմ եռանկյանը, **բ)**a էջով և նրան առընթեր α սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյանը, **գ)**a սրունքով և գագաթի α անկյունով հավասարասրուն եռանկյանը, **դ)**a մեծ հիմքով և α սուր անկյունով հավասարասրուն սեղանին:

265. Կրկեսի ասպարեզի շրջանագծի երկարությունը հավասար է 41մ: Գտեք ասպարեզի տրամագիծը և մակերեսը:

266. Գտեք ընդհանուր կենտրոնով և R_1 ու R_2 շառավիղներով ($R_1<R_2$) երկու շրջանագծերով սահմանափակված օղակի մակերեսը: Հաշվեք օղակի մակերեսը, եթե R_1=1,5սմ, R_2=2,5սմ:

267. Թիրախի վրա պատկերված են ընդհանուր կենտրոնով չորս շրջանագիծ, որոնց շառավիղները հավասար են 1, 2, 3 և 4: Գտեք փոքրագույն շրջանի մակերեսը, ինչպես նաև թիրախի երեք օղակներից յուրաքանչյուրի մակերեսը:

268. Ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի՝ որպես տրամագծերի, վրա կառուցված են երեք կիսաշրջան: Ապացուցեք, որ ներքնաձիգի վրա կառուցված կիսաշրջանի մակերեսը հավասար է էջերի վրա կառուցված կիսաշրջանների մակերեսների գումարին:

269. 10սմ շառավիղով շրջանից կտրված է 60^0 աղեղով սեկտոր: Գտեք շրջանի մնացած մասի մակերեսը:

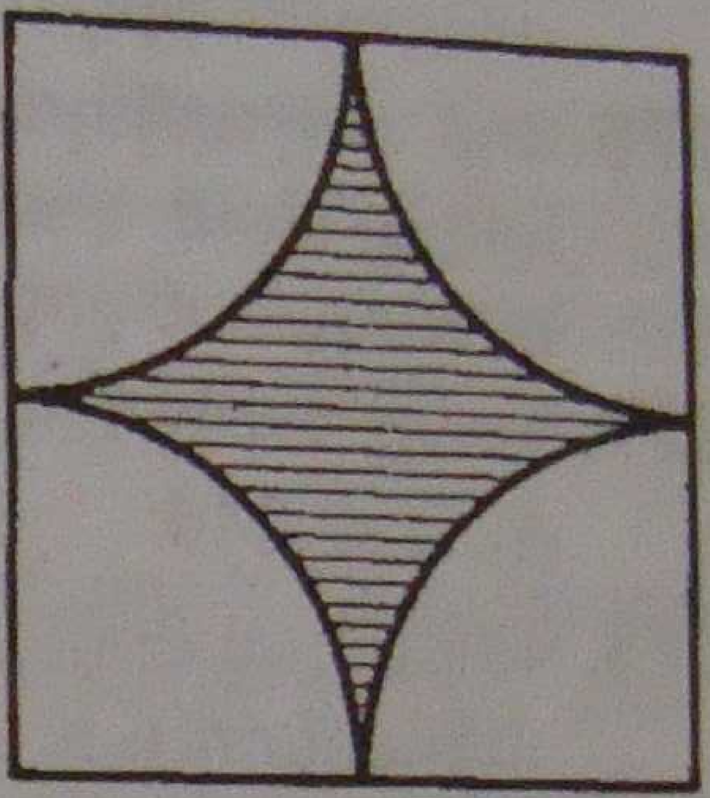
270. 120^0 կենտրոնային անկյունով սեկտորի մակերեսը հավասար է S: Գտեք սեկտորի շառավիղը:

271. Որոշեք սեգմենտի մակերեսը, եթե շառավիղը R է, իսկ աղեղի աստիճանային չափը՝ **ա)**60^0, **բ)**90^0, **գ)**45^0, **դ)**30^0:

272. Որոշեք սեգմենտի մակերեսը, եթե լարը հավասար է a-ի, իսկ աղեղը՝ **ա)**120^0, **բ)**90^0, **գ)**60^0:

273. Գտեք R շառավիղով շրջանի այն մասի մակերեսը, որը գտնվում է նրան ներգծած **ա)**քառակուսուց դուրս, **բ)**կանոնավոր եռանկյունից դուրս, **գ)**կանոնավոր վեցանկյունից դուրս:

274. Նկար 56-ում պատկերված քառակուսու կողմը a է: Հաշվեք ստվերագծված պատկերի մակերեսը:



a

Նկ. 56

Գլուխ XII-ի կրկնության հարցեր

1. Ո՞ր բազմանկյունն է կոչվում կանոնավոր: Բերեք կանոնավոր բազմանկյունների օրինակներ:
2. Արտածեք կանոնավոր n-անկյան անկյունը հաշվելու բանաձևը:
3. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեմ կանոնավոր բազմանկյանն արտագծած շրջանագծի մասին:
4. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեմ կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած շրջանագծի մասին:
5. Արտածեք կանոնավոր բազմանկյան մակերեսը հաշվելու բանաձևը՝ արտահայտված նրա պարագծի և ներգծյալ շրջանագծի շառավիղի միջոցով:
6. Արտածեք կանոնավոր n-անկյան կողմը և ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը հաշվելու բանաձևը՝ արտահայտված նրա արտագծյալ շրջանագծի շառավիղի միջոցով:

7. Արտագծյալ շրջանագծի շառավիղով ինչպե՞ս են արտահայտվում կանոնավոր եռանկյան, քառակուսու և կանոնավոր վեցանկյան կողմերը:

8. Արտածեք շրջանագծի երկարությունը հաշվելու բանաձևը:

9. Բացատրեք, թե որ թիվն է նշանակվում π տառով, և որքան է նրա մոտավոր արժեքը:

10. Արտածեք շրջանագծի աղեղի երկարությունը հաշվելու բանաձևը:

11. Արտածեք շրջանի մակերեսը հաշվելու բանաձևը:

12. Արտածեք շրջանային սեկտորի մակերեսը հաշվելու բանաձևը:

13. Պարզաբանեք, թե ինչ է սեգմենտը, և ինչպես են հաշվում նրա մակերեսը:

Լրացուցիչ խնդիրներ

275. Քանի՞ կողմ ունի այն կանոնավոր բազմանկյունը, որի արտաքին անկյուններից մեկը հավասար է. **ա)** 18^0, **բ)** 40^0, **գ)** 72^0, **դ)** 60^0:

276. 3դմ շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկյան կողմի վրա կառուցված է քառակուսի: Գտեք այդ քառակուսուն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:

277. Գտեք $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ կանոնավոր վեցանկյան պարագիծը, եթե $A_1A_4=2{,}24$մ:

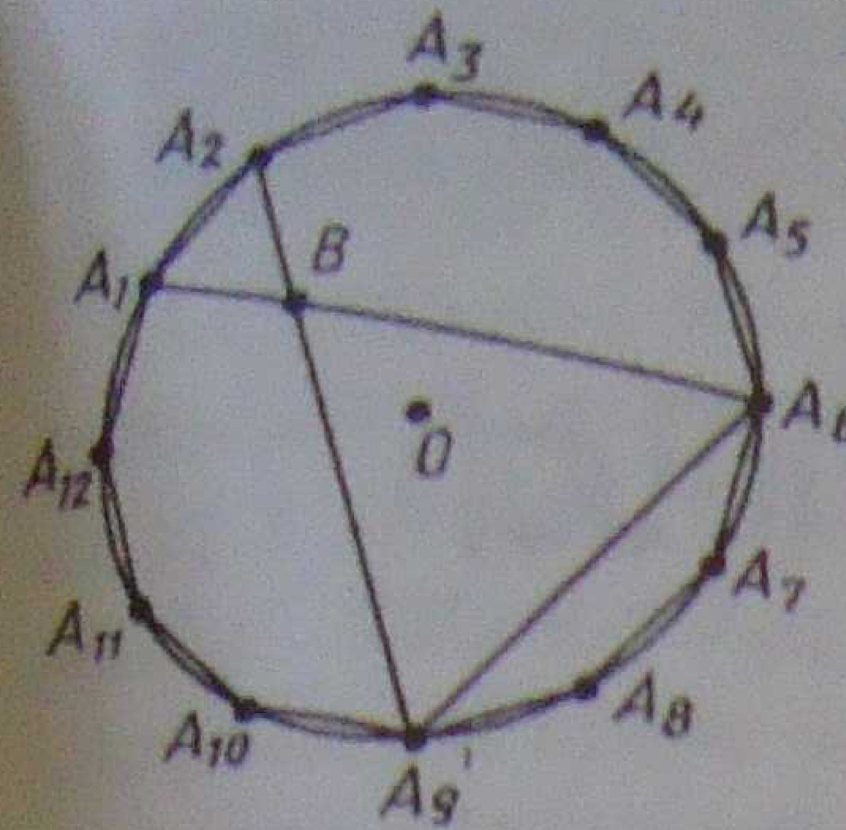
278. Գտեք կանոնավոր եռանկյան և քառակուսու մակերեսների հարաբերությունը, որոնք միևնույն շրջանագծին՝ **ա)** ներգծած են, **բ)** արտագծած են:

279. Կանոնավոր տասներկուանկյան A_1A_6 և A_2A_9 անկյունագծերը հատվում են B կետում (նկ. 57): Ապացուցեք, որ **ա)** A_1A_2B և A_6A_9B եռանկյունները հավասարակողմ են, **բ)** $A_1A_6=2r$, որտեղ r-ը կանոնավոր տասներկուանկյան ներգծյալ շրջանագծի շառավիղն է:

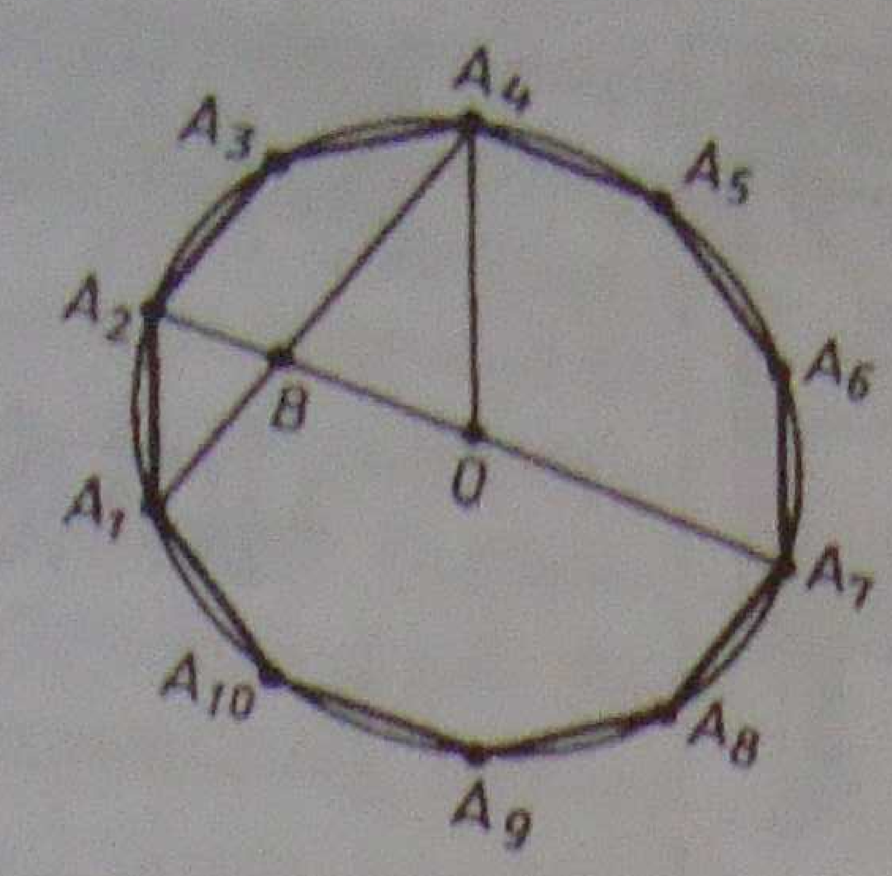
280. R շառավիղով շրջանագծին ներգծած $A_1A_2...A_{10}$ կանոնավոր տասնանկյան A_1A_4 և A_2A_7 անկյունագծերը հատվում են B կետում (նկ. 58): Ապացուցեք, որ. **ա)** $A_2A_7=2R$, **բ)** A_1A_2B-ն և BA_4O-ն նման և հավասարասրուն եռանկյուններ են, **գ)** $A_1A_4-A_1A_2=R$:

281. Կանոնավոր վեցանկյունը ներգծված է այն շրջանագծին, որով սահմանափակված շրջանի մակերեսը 36πսմ^2 է: **ա)** Գտեք այդ վեցանկյան կողմը և մակերեսը: **բ)** Գտեք շրջանի այն մասի մակերեսը, որն ընկած է վեցանկյունից դուրս:

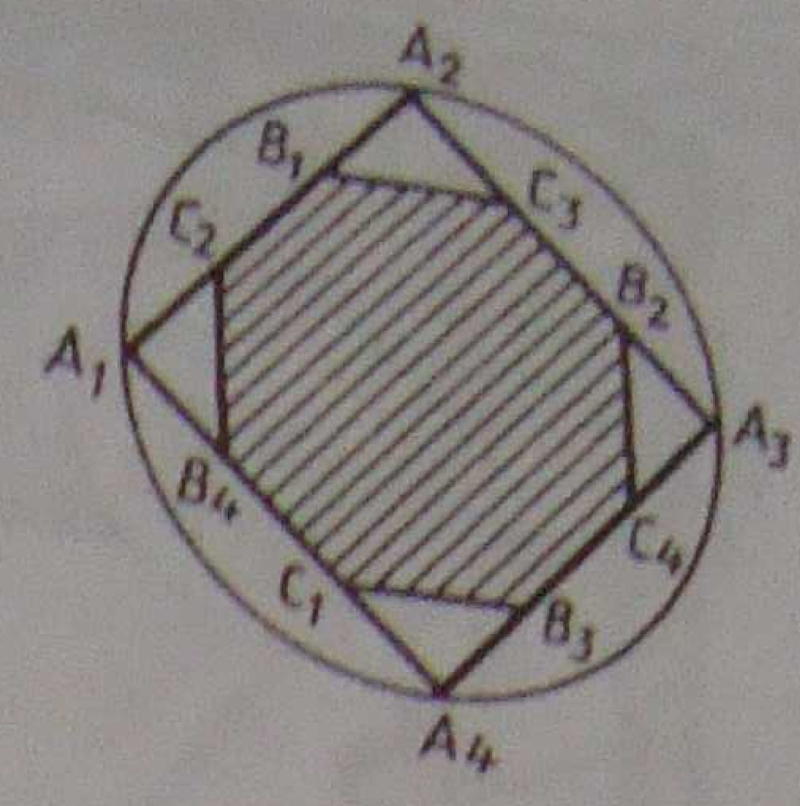
282. $A_1A_2A_3A_4$ քառակուսին ներգծված է R շառավիղով շրջանագծին (նկ. 59): Նրա կողմերի վրա նշված են ութ այնպիսի կետեր, որ $A_1B_1=A_2B_2=A_3B_3=A_4B_4=A_1C_1=A_2C_2=A_3C_3=A_4C_4=R$: Ապացուցեք, որ $B_1C_3B_2C_4B_3C_1B_4C_2$ ութանկյունը կանոնավոր է, և այդ ութանկյան մակերեսն արտահայտեք R շառավիղով:



Նկ. 57



Նկ. 58



Նկ. 59

283. Տիեզերանավը Երկրի շուրջը շրջանային ուղեծրով կատարել է երկու պտույտ՝ այդ ընթացքում անցնելով 84152կմ ճանապարհ: Երկրի մակերևույթից ի՞նչ բարձրության վրա է գտնվել տիեզերանավը, եթե Երկրի շառավիղը 6370կմ է:

284. Գտեք շեղանկյանը ներգծած շրջանագծի երկարությունը, եթե. **ա)** շեղանկյան անկյունագծերն են 6սմ և 8սմ, **բ)** շեղանկյան կողմը a է, իսկ սուր անկյունը՝ α:

285. Անտառային տեղամասն ունի շրջանի ձև: Շարժվելով 4կմ/ժ արագությամբ՝ անտառեզրով մեկ լրիվ պտույտ կատարելիս ծախսվում է 45 րոպեով ավելի շատ ժամանակ, քան անտառի ուղիղ մեջտեղով տրամագծի մի ծայրից մյուսն անցնելիս: Գտեք այդ տեղամասի անտառեզրի երկարությունը:

286. Կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած է շրջանագիծ: Ապացուցեք, որ այդ շրջանագծով սահմանափակված շրջանի և այդ բազմանկյան մակերեսների հարաբերությունը հավասար է շրջանագծի երկարության և բազմանկյան պարագծի հարաբերությանը:

287. Գտեք երկու այն շրջանների ընդհանուր մասի մակերեսը, որոնց շառավիղներն են 1 և $\sqrt{3}$, իսկ կենտրոնների հեռավորությունը՝ 2:

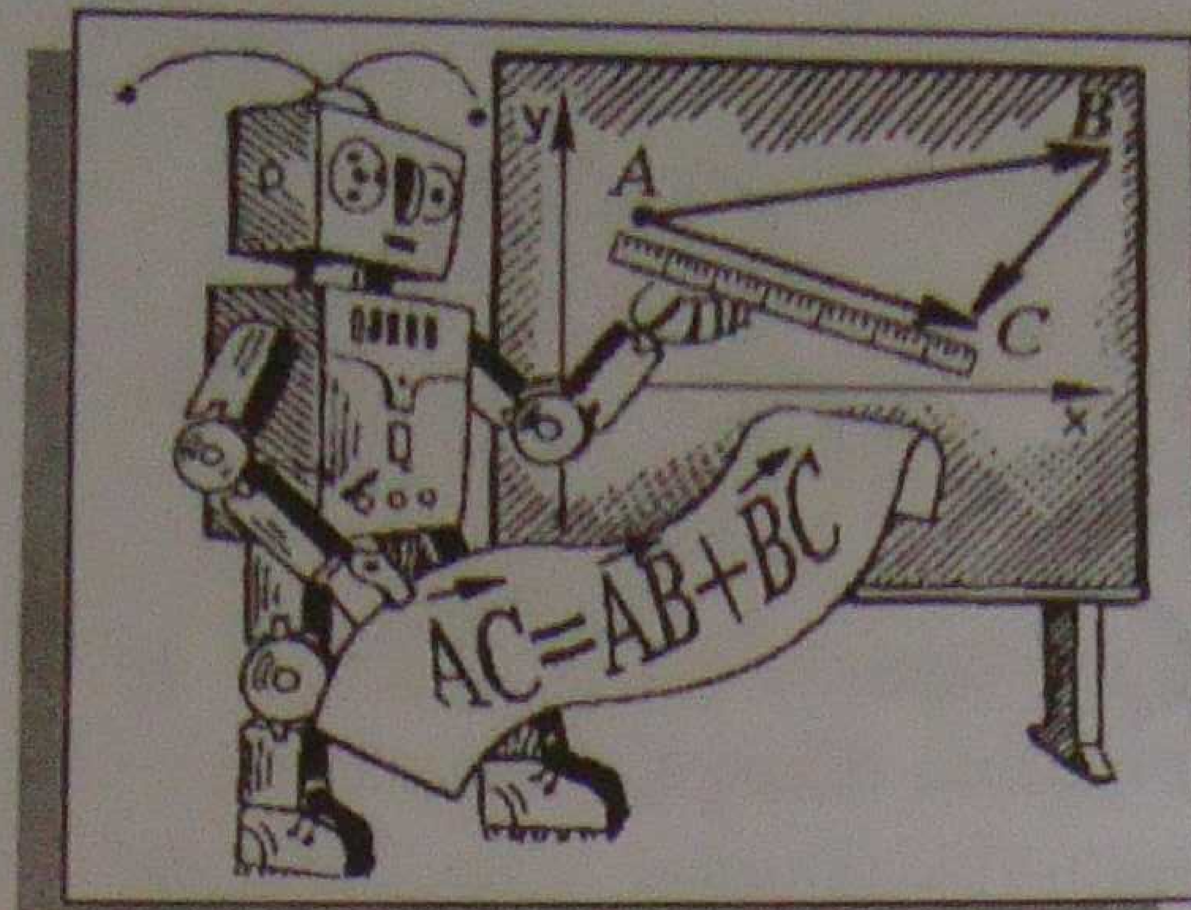
288*. AB-ն և CD-ն նույն շրջանագծի փոխուղղահայաց տրամագծեր են: D կետը վերցնելով որպես կենտրոն՝ գծված է DA շառավիղով AMB աղեղը (M-ը շրջանի ներքին կետ է): Ապացուցեք, որ լուսնյակի ձև ունեցող $AMBC$ պատկերի մակերեսը հավասար է ABD եռանկյան մակերեսին:

289*. Կառուցեք կանոնավոր ութանկյուն, որի կողմը հավասար է տրված հատվածին:

290*. Տրված են երկու շրջան: Կառուցեք մի շրջան, որի մակերեսը հավասար է տրված երկու շրջանների մակերեսների գումարին:

291. Տրված շրջանագծին արտագծեք. **ա)** կանոնավոր եռանկյուն, **բ)** կանոնավոր վեցանկյուն:

292. Տրված շրջանագծին արտագծեք. **ա)** կանոնավոր քառանկյուն, **բ)** կանոնավոր ութանկյուն:



ԳԼՈՒԽ XIII

ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ

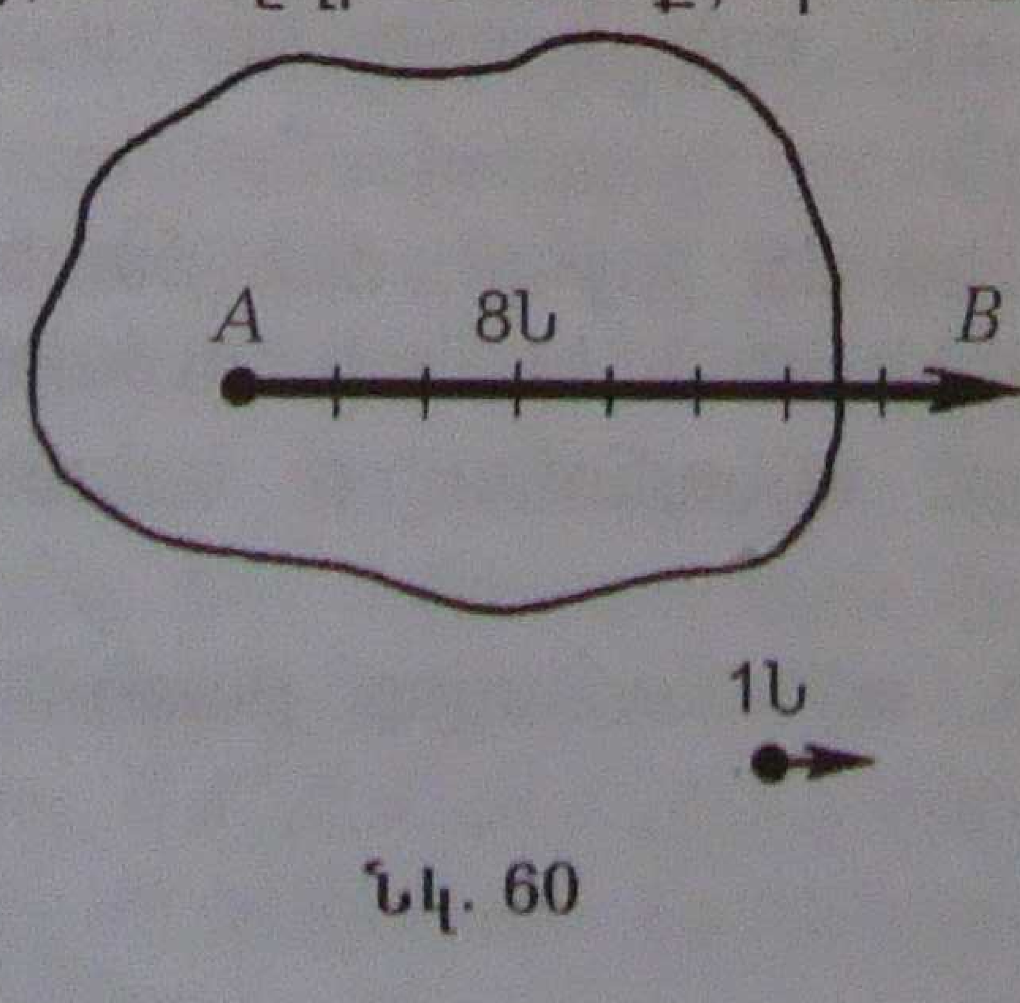
§ 1 ՎԵԿՏՈՐԻ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

(38) **Վեկտորի հասկացությունը:** Բազմաթիվ ֆիզիկական մեծություններ, օրինակ՝ ուժը, նյութական կետի տեղափոխությունը, արագությունը, բնութագրվում են ոչ միայն թվային արժեքով, այլև տարածության մեջ ունեցած ուղղությունով: Այդպիսի ֆիզիկական մեծությունները կոչվում են *վեկտորական մեծություններ* (կամ հակիրճ *վեկտորներ*):

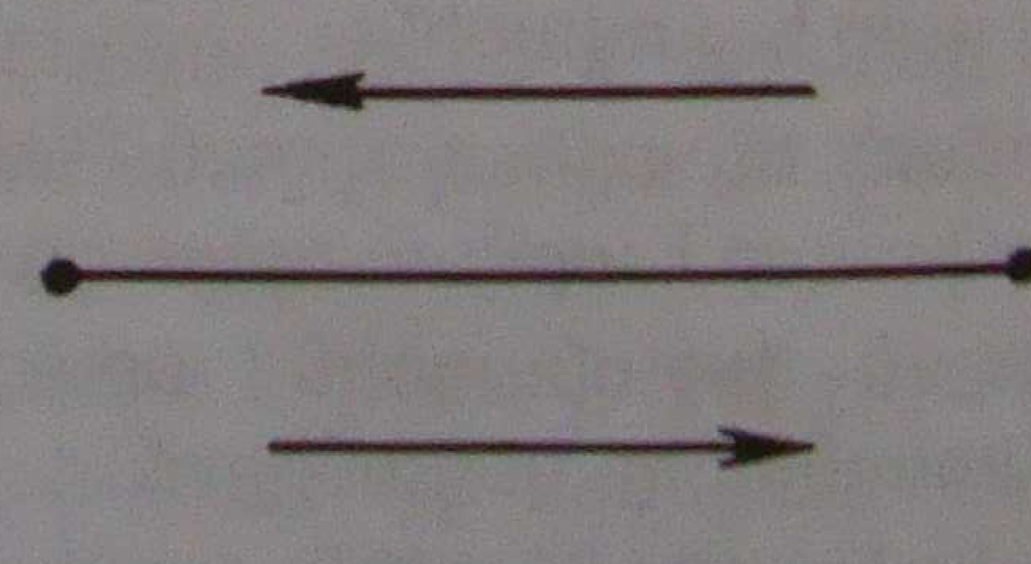
Դիտարկենք մի օրինակ: Դիցուք՝ մարմնի վրա ազդում է 8Ն ուժ: Նկարում ուժը պատկերում են հատվածով, որի ծայրին նշվում է սլաք (նկ. 60): Սլաքը ցույց է տալիս ուժի ուղղությունը, իսկ հատվածի երկարությունը համապատասխանում է ուժի թվային արժեքին՝ ըստ ընտրած մասշտաբի: Այսպես, նկար 60-ում 1Ն ուժը պատկերված է 0,4սմ երկարությամբ հատվածով, ուրեմն՝ 8Ն ուժը պատկերվում է 3,2սմ երկարությամբ հատվածով:

Վերանալով ֆիզիկական վեկտորական մեծությունների որոշ կոնկրետ հատկություններից՝ մենք հանգում ենք վեկտորի երկրաչափական հասկացությանը:

Դիտենք կամայական հատված: Նրա վրա կարելի է ցուցանշել երկու ուղղություն՝ մի ծայրից դեպի մյուսը և հակառակը (նկ. 61): Որպեսզի ընտրենք այդ ուղղություններից մեկը, հատվածի մի ծայրն անվանենք *սկիզբ* (կամ *սկզբնակետ*), իսկ մյուսը՝ *վերջ* (կամ *վերջնակետ*), և հաշվի առնենք, որ հատվածն ուղղված է սկզբից դեպի վերջը:



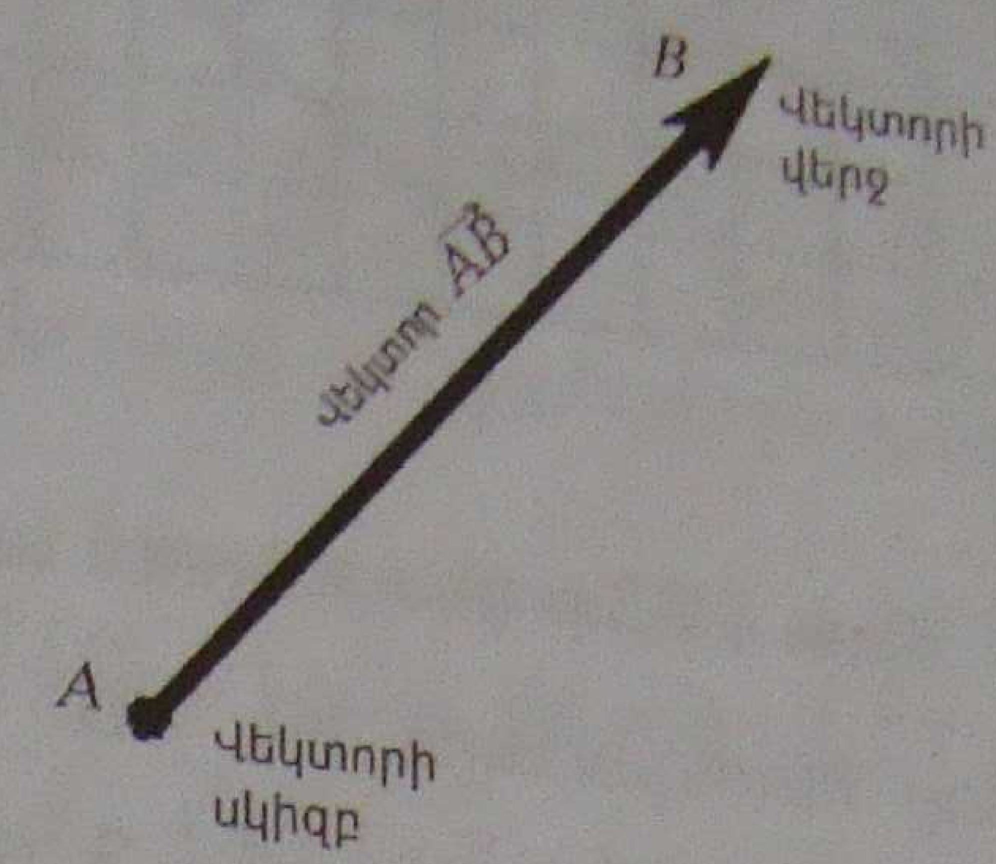
Նկ. 60



Նկ. 61

Ս ա հ մ ա ն ու մ: *Այն հատվածը, որի համար ցուցանշված է, թե նրա ծայրերից որն է սկիզբը, և որը՝ վերջը, կոչվում է ուղղորդված հատված կամ վեկտոր:*

Նկարներում վեկտոր պատկերում են հատվածով՝ նրա վրա նշելով սլաք, որը ցույց է տալիս այդ վեկտորի ուղղությունը: Վեկտորները նշանակվում են լատինական երկու մեծատառով, որոնց վերևում դրվում է գծիկով սլաք, օրինակ $\vec{AB}$: Առաջին տառը նշանակում է վեկտորի սկիզբը, իսկ երկրորդը՝ վերջը (նկ. 62): Այսպիսով, տվյալ նշանակման դեպքում A և B տառերին վերագրվում են տարբեր դերեր: $\vec{AB}$ վեկտորը հատկապես հենց դրանով է տարբերվում AB հատվածից:

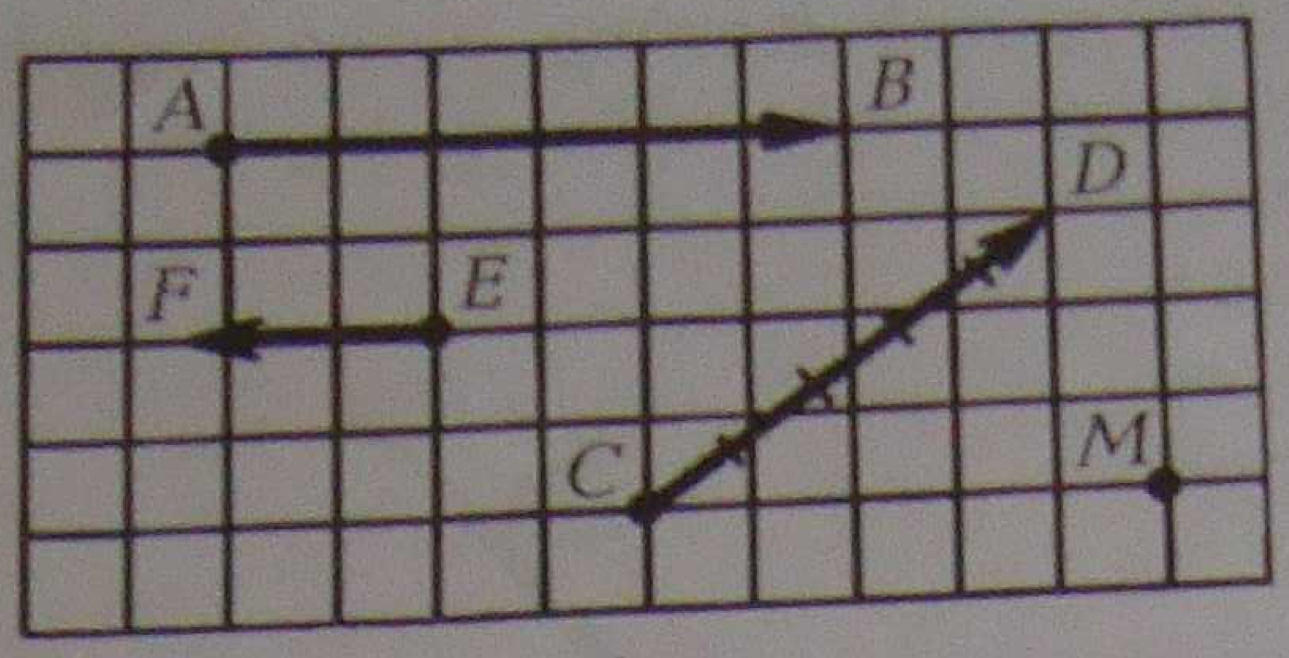


Նկ. 62

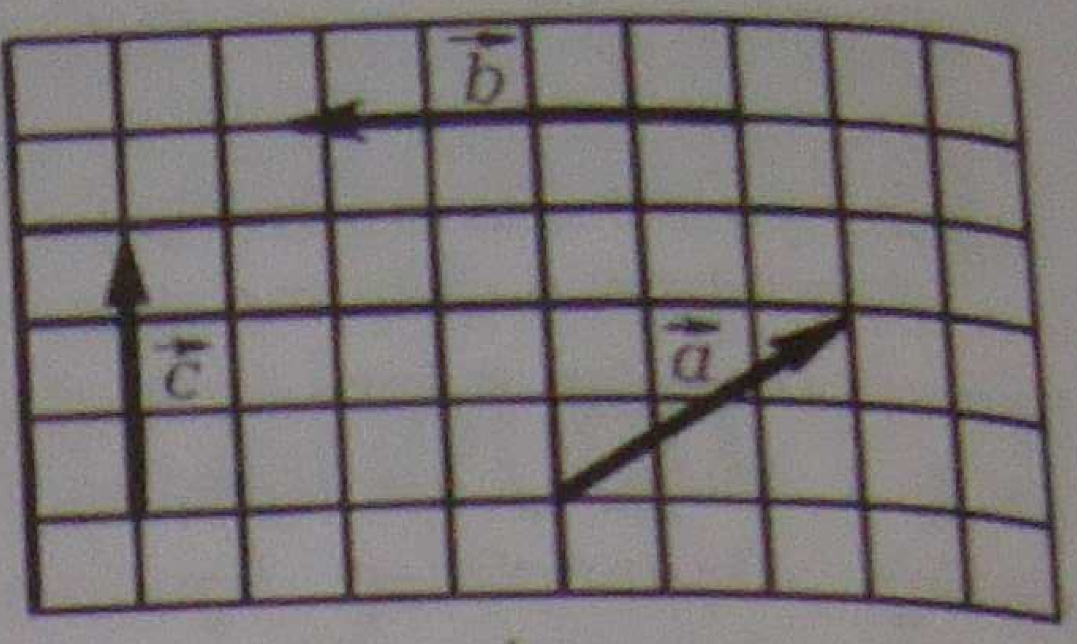
63,ա նկարում պատկերված են $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{EF}$ վեկտորները. A, C և E կետերը այդ վեկտորների սկզբնակետերն են, իսկ B, D և F կետերը՝ նրանց վերջնակետերը: Վեկտորները հաճախ նշանակվում են նաև լատինական փոքրատառերով. այդ դեպքում գրվում է մեկ փոքրատառ և նրա վերևում դրվում է գծիկով սլաք, օրինակ՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (նկ. 63,բ):

Հետագայի համար նպատակահարմար է պայմանավորվել, որ հարթության յուրաքանչյուր կետը դիտվում է որպես վեկտոր: Այդ դեպքում վեկտորը կոչվում է *զրոյական* վեկտոր: Զրոյական վեկտորի սկիզբը և վերջը համընկնում են. այդպիսի վեկտորը նկարում պատկերված է մեկ կետով: Օրինակ. եթե զրոյական վեկտոր պատկերող կետը նշանակված է M տառով, ապա տվյալ զրոյական վեկտորը նշանակվում է $\vec{MM}$ (նկ. 63,ա): Զրոյական վեկտորը նշանակվում է նաև $\vec{O}$ պայմանանշանով: 63,ա նկարում $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{EF}$ վեկտորները ոչ զրոյական են, իսկ $\vec{MM}$ վեկտորը զրոյական է:

Ոչ զրոյական $\vec{AB}$ վեկտորի *երկարություն* կամ *մոդուլ* կոչվում է AB հատվածի երկարությունը: $\vec{AB}$ վեկտորի երկարությունը նշանակվում է $|\vec{AB}|$, նմանապես $\vec{a}$ վեկտորի երկարությունը՝ $|\vec{a}|$: Զրոյական վեկտորի երկարությունը համարվում է հավասար 0-ի. $|\vec{O}| = 0$:



ա)



բ)

Նկ. 63

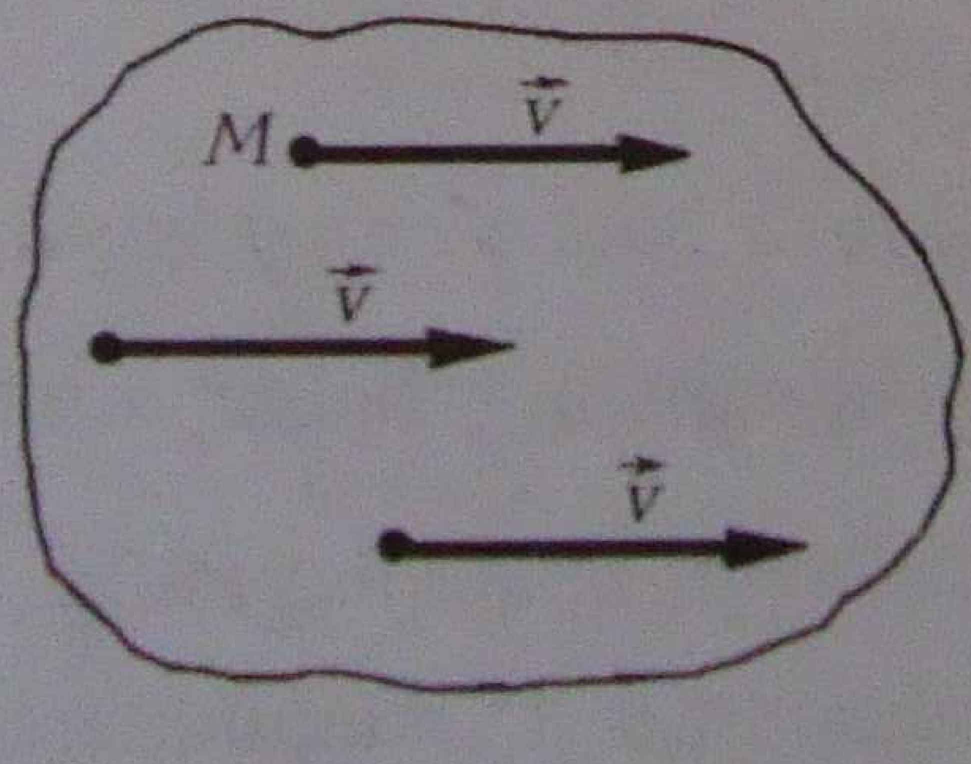
63,ա և 63,բ նկարներում պատկերված վեկտորների երկարությունները հետևյալներն են. $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{CD}| = 5$, $|\overrightarrow{EF}| = 2{,}5$, $|\overrightarrow{MM}| = 0$, $|\vec{a}| = \sqrt{13}$, $|\vec{b}| = 4{,}5$, $|\vec{c}| = 3$ (նկարում վանդակներից յուրաքանչյուրի կողմը հավասար է հատվածների չափման միավորին):

39 Վեկտորների հավասարությունը:

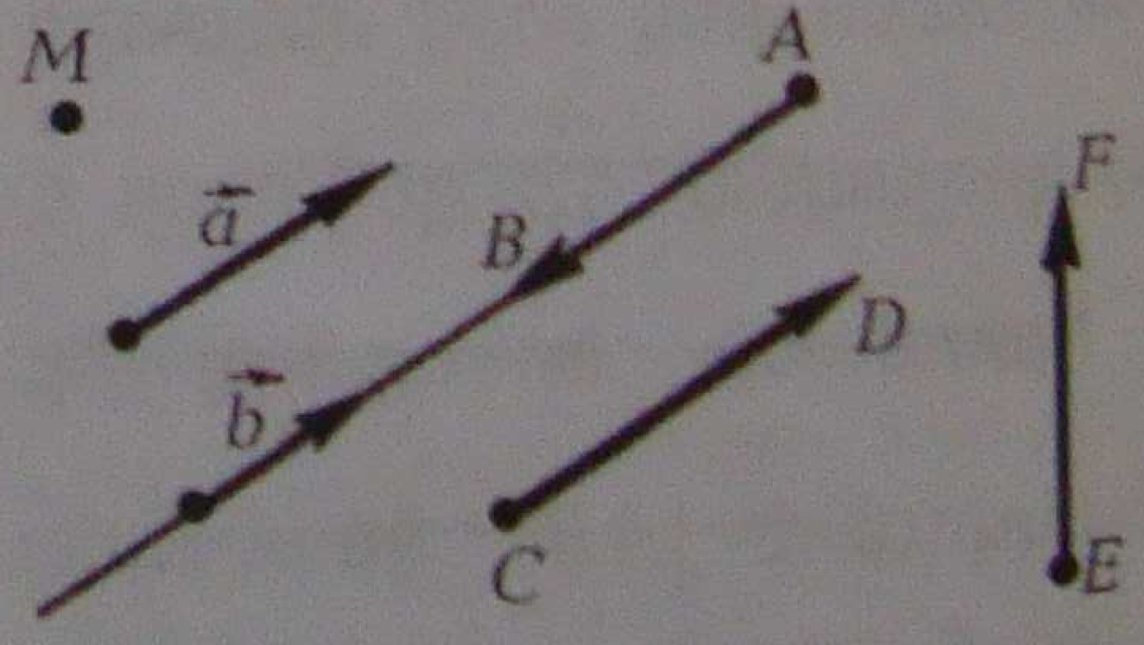
Հավասար վեկտորների սահմանումը տալուց առաջ պարզաբանենք մի օրինակ: Դիտարկենք մարմնի շարժումը, որի ընթացքում նրա բոլոր կետերը շարժվում են հենց նույն արագությամբ և միևնույն ուղղությամբ: Մարմնի յուրաքանչյուր M կետի արագությունը վեկտորական մեծություն է և, ուրեմն, այն կարելի է պատկերել այնպիսի ուղղորդված հատվածով, որի սկիզբը համընկնում է M կետին (նկ. 64): Քանի որ մարմնի բոլոր կետերը շարժվում են միևնույն արագությունով, ապա այդ բոլոր կետերի արագությունները պատկերող ուղղորդված հատվածներն ունեն միևնույն ուղղությունը, և հավասար են նրանց երկարությունները:

Այս օրինակը մեզ հուշում է, թե ինչպես սահմանել վեկտորների հավասարությունը: Սակայն, նախապես ներմուծենք համագիծ վեկտորների հասկացությունը:

Ոչ զրոյական վեկտորները կոչվում են համագիծ, եթե նրանք գտնվում են կա՛մ նույն ուղղի, կա՛մ զուգահեռ ուղիղների վրա: Զրոյական վեկտորը համարվում է ցանկացած վեկտորին համագիծ:



Նկ. 64



Նկ. 65

Նկար 65-ում $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MM}$ ($\overrightarrow{MM}$-ը զրոյական է) վեկտորները համագիծ են, իսկ $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{EF}$, ինչպես նաև $\overrightarrow{CD}$ և $\overrightarrow{EF}$ վեկտորները համագիծ չեն (ոչ համագիծ վեկտորներին կանվանենք նաև *տարագիծ* վեկտորներ):

Եթե երկու՝ ոչ զրոյական $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ապա նրանք կարող են ուղղված լինել կա՛մ միանման, կա՛մ հակադիր: Առաջին դեպքում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կոչվում են *համուղղված*, իսկ երկրորդ դեպքում՝ *հակուղղված**:

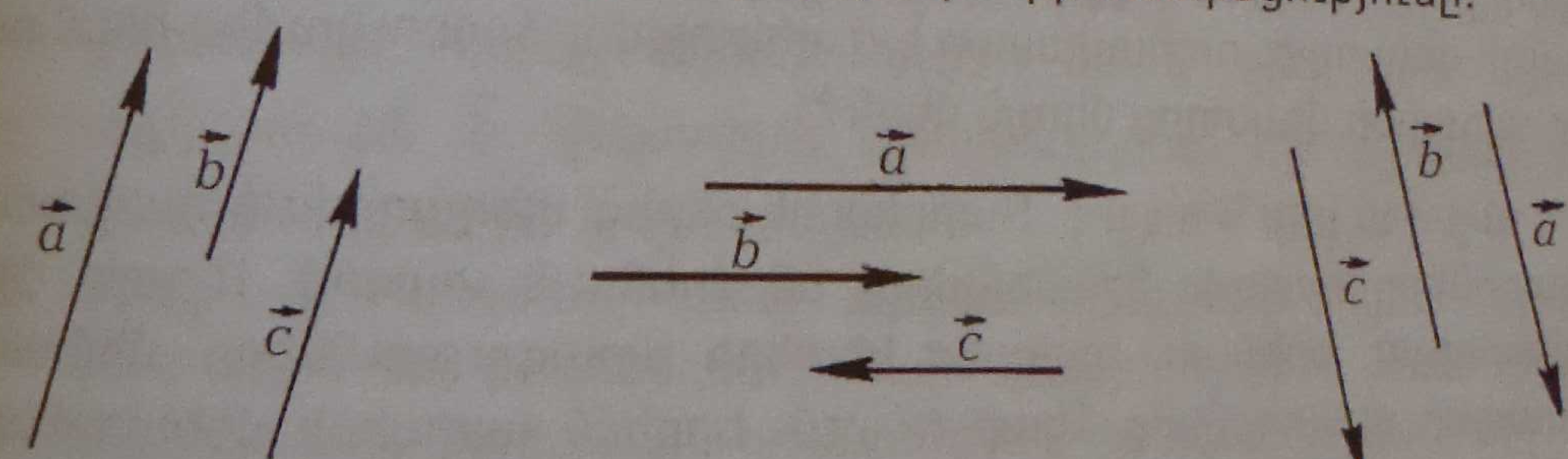
Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են, ապա գրում են $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, իսկ եթե հակուղղված են, ապա՝ $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$: Նկար 65-ում $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, $\vec{a}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$:

Ինչպես ասել ենք, զրոյական վեկտորի սկիզբը համընկնում է նրա վերջին և, ուրեմն, զրոյական վեկտորը որևէ որոշակի ուղղություն չունի: Այլ խոսքով՝ ցանկացած ուղղությունը կարելի է համարել զրոյական վեկտորի ուղղություն: Պայմանավորվենք՝ զրոյական վեկտորը համարել ցանկացած վեկտորին *համուղղված:*

Այսպիսով, նկար 65-ում $\overrightarrow{MM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MM}\uparrow\uparrow\vec{a}$ և այլն:

Ոչ զրոյական համագիծ վեկտորներն օժտված են որոշակի հատկություններով, որոնք պարզաբանված են 66,ա,բ,գ նկարներում:

Այժմ սահմանենք հավասար վեկտորների հասկացությունը:



Եթե $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}, \vec{b}\uparrow\uparrow\vec{c}$, ապա $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ $(\vec{c}\neq\vec{0})$
ա)

Եթե $\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{c}, \vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$, ապա $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$
բ)

Եթե $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}, \vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$, ապա $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$
գ)

Նկ. 66

---

* Անշուշտ, դժվար չէ նաև ճշգրիտ սահմանել այս հասկացությունները: Օրինակ. զուգահեռ ուղիղների վրա գտնվող երկու՝ ոչ զրոյական վեկտորները կոչվում են համուղղված (հակուղղված), եթե նրանց վերջնակետերը գտնվում են այն ուղղի միևնույն կողմում (տարբեր կողմերում), որն անցնում է դրանց սկզբնակետերով: Մտածեք, թե ինչպես տալ նմանատիպ սահմանում երկու այն վեկտորների համար, որոնք գտնվում են մի ուղղի վրա:

Սահմանում: *Վեկտորները կոչվում են հավասար, եթե նրանք համուղղված են, և նրանց երկարությունները հավասար են:*

Այսպիսով՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները հավասար են, եթե $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ և $|\vec{a}| = |\vec{b}|$:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների հավասարությունը նշանակվում է. $\vec{a} = \vec{b}$:

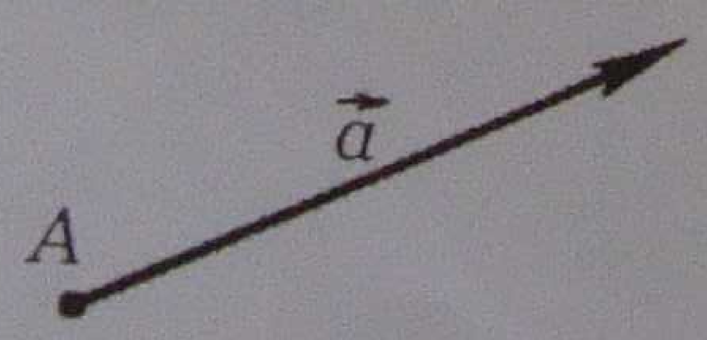
40 Վեկտորների տեղադրումը տրված կետից:

Եթե A կետը $\vec{a}$ վեկտորի սկիզբն է, ապա ասում են, որ $\vec{a}$ վեկտորը տեղադրված է A կետից (նկ. 67): Ապացուցենք հետևյալ պնդումը:

Յանկացած M կետից կարելի է տեղադրել տրված $\vec{a}$ վեկտորին հավասար վեկտոր, ընդ որում՝ միայն մեկը:

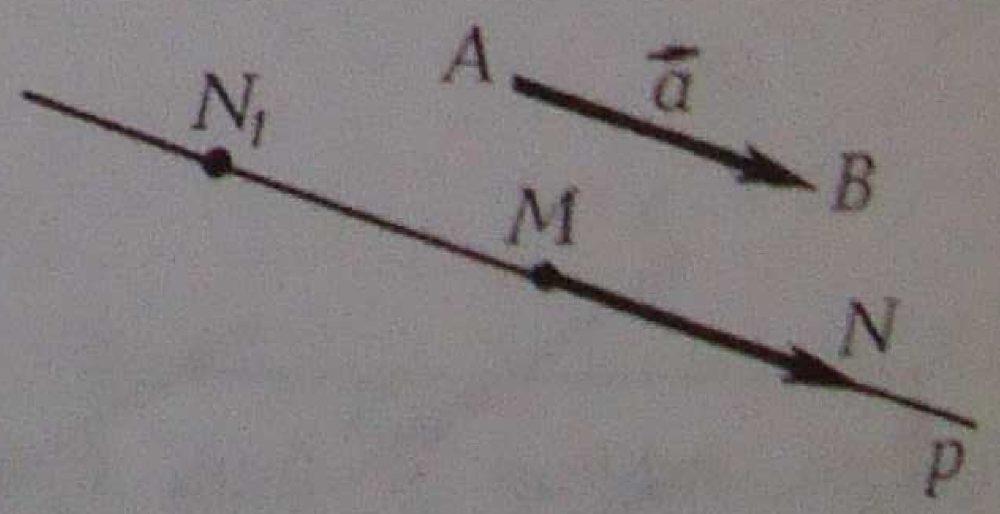
Իսկապես, եթե $\vec{a}$-ն զրոյական վեկտոր է, ապա հենց $\overrightarrow{MM}$ վեկտորը կլինի որոնելի վեկտորը: Ենթադրենք, որ $\vec{a}$-ն ոչ զրոյական վեկտոր է, իսկ A-ն և B-ն նրա սկիզբն ու վերջն են: M կետով տանենք p ուղիղը, որ զուգահեռ է AB-ին (նկ. 68: Նշենք, որ եթե M-ը AB ուղղի կետ է, ապա որպես p ուղիղ վերցնում ենք հենց AB ուղիղը): p ուղղի վրա տեղադրենք AB հատվածին հավասար MN և MN_1 հատվածները: $\overrightarrow{MN}$ և $\overrightarrow{MN_1}$ վեկտորներից ընտրենք այն, որը համուղղված է $\vec{a}$ վեկտորին ($\overrightarrow{MN}$ վեկտորը՝ նկ. 68-ում): Յենց այդ վեկտորն էլ կլինի որոնելի վեկտորը, որ հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին: Կառուցումից հետևում է, որ այդպիսի վեկտորը միայն մեկն է:

Պարզաբանում: Տարբեր կետերից տեղադրված հավասար վեկտորները հաճախ նշանակվում են միևնույն տառով: Այդպես էին նշանակված, օրինակ, տարբեր կետերի արագությունների՝ միմյանց հավասար վեկտորները նկար 64-ում: Երբեմն այդպիսի վեկտորների համար ասում են, որ դրանք հենց նույն վեկտորն են, թեև տեղադրված են տարբեր կետերից:



$\vec{a}$ *վեկտորը տեղադրված է*
A կետից

Նկ. 67



Նկ. 68

293. Նշեք մի ուղղի վրա չգտնվող երեք՝ A, B, C կետեր: Գծեք բոլոր ոչ զրոյական վեկտորները, որոնց սկիզբն ու վերջը համընկնում են այդ կետերից որևէ երկուսին: Գրեք ստացված բոլոր վեկտորները և նշեք յուրաքանչյուրի սկիզբն ու վերջը:

294. Ընտրելով մի հարմար մասշտաբ՝ գծագրեք այն վեկտորները, որոնք պատկերում են ինքնաթիռի հետևյալ թռիչքը. սկզբում A քաղաքից դեպի հարավ՝ 300կմ մինչև B քաղաքը, իսկ հետո դեպի արևելք՝ 500կմ մինչև C քաղաքը: Այնուհետև գծեք $\vec{AC}$ վեկտորը, որը պատկերում է ինքնաթիռի տեղափոխությունը թռիչքի սկզբնակետից մինչև վերջնակետ:

295. Գծեք $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ և $\vec{EF}$ վեկտորներն այնպես, որ. **ա)** $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ և $\vec{EF}$ վեկտորները լինեն համագիծ, և $|\vec{AB}| = 1$սմ, $|\vec{CD}| = 2{,}5$սմ, $|\vec{EF}| = 4{,}5$սմ, **բ)** $\vec{AB}$ և $\vec{EF}$ վեկտորները լինեն համագիծ, $\vec{AB}$ և $\vec{CD}$ վեկտորները համագիծ չլինեն, և $|\vec{AB}| = 3$սմ, $|\vec{CD}| = 1{,}5$սմ, $|\vec{EF}| = 1$սմ:

296. Գծեք երկու՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ տարագիծ վեկտորներ: Պատկերեք մի քանի վեկտորներ, որոնք. **ա)** համուղղված են $\vec{a}$ վեկտորին, **բ)** համուղղված են $\vec{b}$ վեկտորին, **գ)** հակուղղված են $\vec{a}$ վեկտորին, **դ)** հակուղղված են $\vec{b}$ վեկտորին:

297. Գծեք երկու վեկտոր, որոնք. **ա)** ունեն հավասար երկարություն և տարագիծ են, **բ)** ունեն հավասար երկարություն և համուղղված են, **գ)** ունեն հավասար երկարություն և հակուղղված են: Ո՞ր դեպքում են ստացվում հավասար վեկտորներ:

298. Գծեք ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտոր և նշեք հարթության երեք՝ A, B, C կետեր: A, B, C կետերից տեղադրեք $\vec{a}$-ին հավասար վեկտորներ:

Հարցեր և խնդիրներ

299. Հետևյալ մեծություններից որո՞նք են վեկտորական. արագություն, զանգված, ուժ, ժամանակ, ջերմաստիճան, երկարություն, մակերես, աշխատանք:

300. $ABCD$ ուղղանկյան մեջ $AB=3$սմ, $BC=4$սմ, իսկ M-ը AB կողմի միջնակետն է: Գտեք $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{DC}$, $\vec{MC}$, $\vec{MA}$, $\vec{CB}$, $\vec{AC}$ վեկտորների երկարությունները:

301. A ուղիղ անկյունով $ABCD$ ուղղանկյուն սեղանի AD հիմքը 12սմ է, AB=5սմ, $\angle D=45^0$: Գտեք $\vec{BD}$, $\vec{CD}$ և $\vec{AC}$ վեկտորների երկարությունները:

302. Գրեք այն համագիծ վեկտորների զույգերը, որոնք որոշվում են. **ա)** $MNPQ$ զուգահեռագծի կողմերով, **բ)** AD և BC հիմքերով $ABCD$ սեղանի կողմերով, **գ)** FGH եռանկյան կողմերով: Դրանցից առանձնացրեք համուղղված և հակուղղված վեկտորների զույգերը:

303. $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում: Արդյոք հավասա՞ր են հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{AB}$ և $\vec{DC}$, **բ)** $\vec{BC}$ և $\vec{DA}$, **գ)** $\vec{AO}$ և $\vec{OC}$, **դ)** $\vec{AC}$ և $\vec{BD}$: Պատասխանը հիմնավորեք:

304. $MNKL$ հավասարասրուն սեղանի MN և LK սրունքների միջնակետերը S և T կետերն են: Արդյոք հավասա՞ր են հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{NL}$ և $\vec{KL}$, **բ)** $\vec{MS}$ և $\vec{SN}$, **գ)** $\vec{MN}$ և $\vec{KL}$, **դ)** $\vec{TS}$ և $\vec{KM}$, **ե)** $\vec{TL}$ և $\vec{KT}$:

305. Ապացուցեք, որ եթե $\vec{AB}$ և $\vec{CD}$ վեկտորները հավասար են, ապա AD և BC հատվածների միջնակետերը համընկնում են: Ապացուցեք հակադարձ պնդումը. եթե AD և BC հատվածների միջնակետերը համընկնում են, ապա $\vec{AB}=\vec{CD}$:

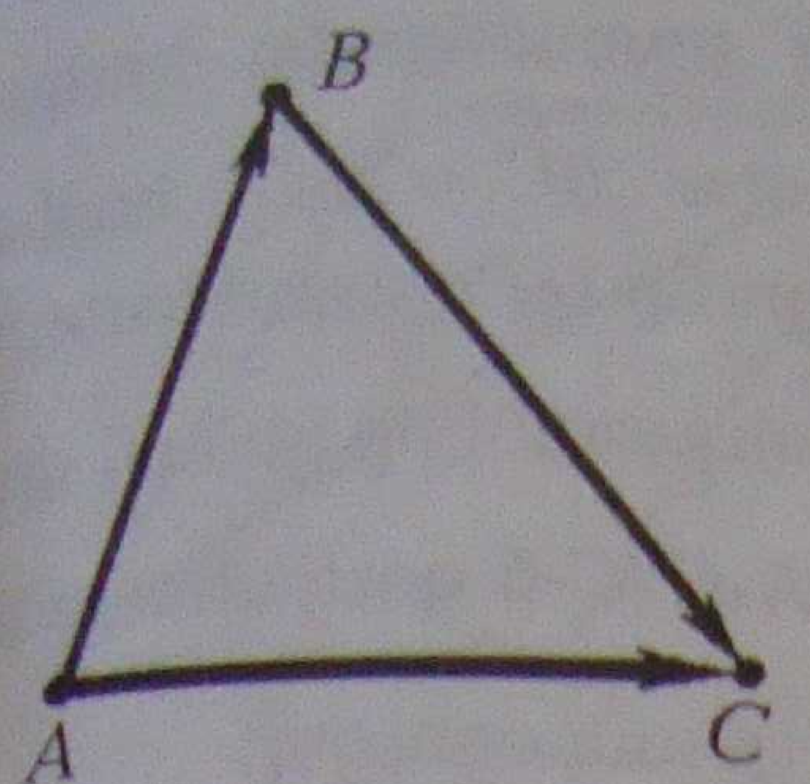
306. Որոշեք $ABCD$ քառանկյան տեսքը, եթե. **ա)** $\vec{AB}=\vec{DC}$ և $|\vec{AB}|=|\vec{BC}|$, **բ)** $\vec{AB}\uparrow\uparrow\vec{DC}$, իսկ $\vec{AD}$ և $\vec{BC}$ վեկտորները համագիծ չեն:

307. Արդյոք ճշմարի՞տ է հետևյալ պնդումը. **ա)** եթե $\vec{a}=\vec{b}$, ապա $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, **բ)** եթե $\vec{a}=\vec{b}$, ապա $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, **գ)** եթե $\vec{a}=\vec{b}$, ապա $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, **դ)** եթե $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, ապա $\vec{a}=\vec{b}$, **ե)** եթե $\vec{a}=\vec{0}$, ապա $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$:

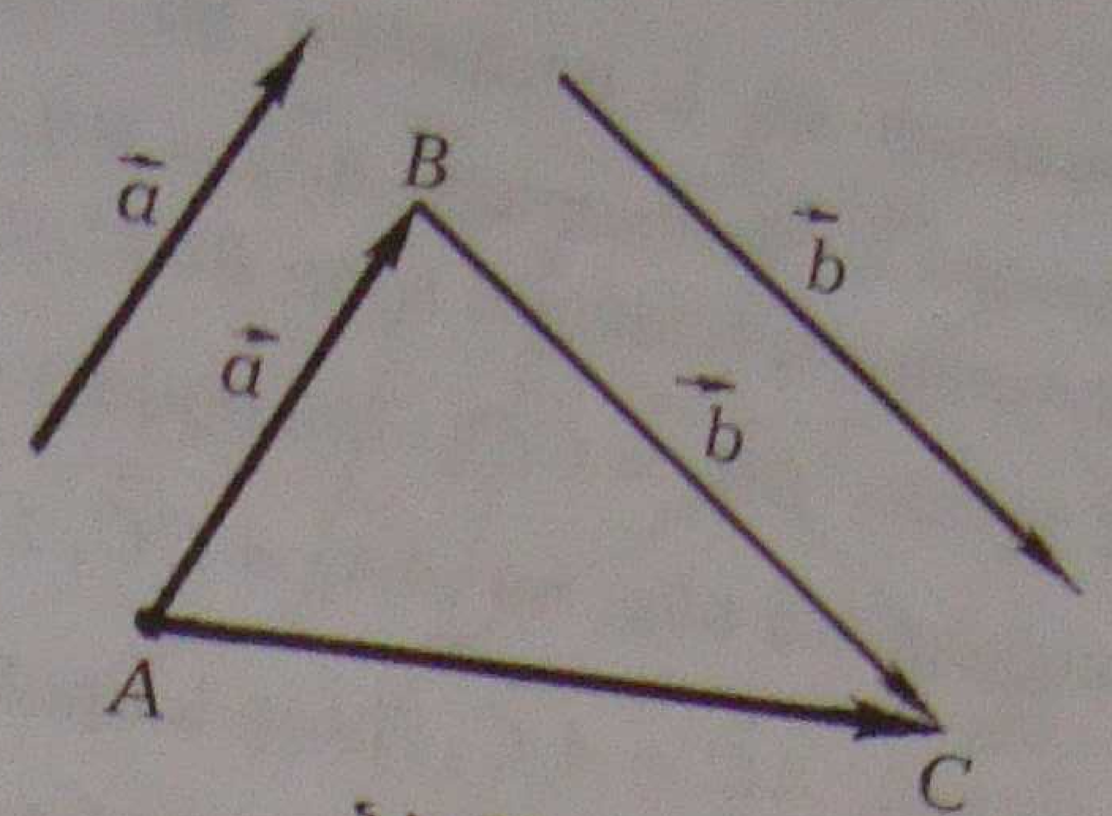
§ 2 ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ ԵՎ ՀԱՆՈՒՄԸ

41 Երկու վեկտորների գումարը:

Դիտարկենք մի օրինակ: Դիցուք՝ նյութական կետը տեղափոխվել է նախ՝ A կետից B կետը, իսկ հետո՝ B կետից C կետը (նկ. 69): Այդ երկու տեղափոխությունը կարելի է ներկայացնել $\vec{AB}$ և $\vec{BC}$ վեկտորներով,



Նկ. 69

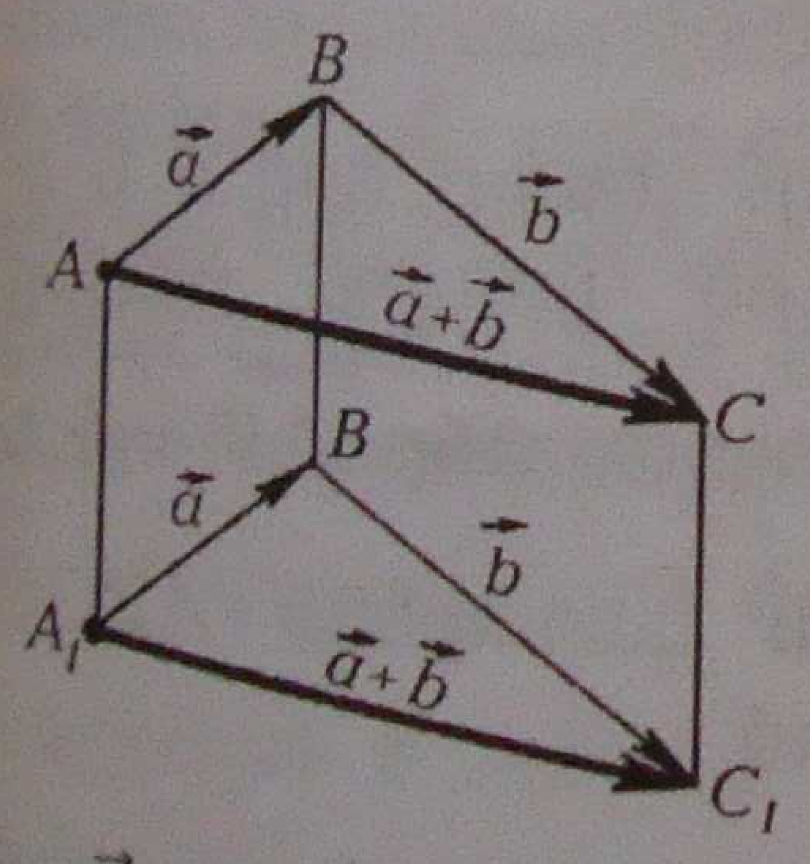


Նկ. 70

որոնց արդյունքում էլ նյութական կետը A կետից տեղափոխվել է C կետը: Ուրեմն՝ վերջնական տեղափոխությունը կարելի է ներկայացնել $\vec{AC}$ վեկտորով: Քանի որ A կետից C կետ տեղափոխությունը ստացվում է՝ A-ից B տեղափոխությանն ավելացնելով B-ից C տեղափոխությունը, ապա բնական կլինի $\vec{AC}$ վեկտորը համարել որպես $\vec{AB}$ և $\vec{BC}$ վեկտորների գումար. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$:

Նկարագրված օրինակը մեզ հանգեցնում է երկու վեկտորների գումարի հասկացությանը: Դիցուք՝ *երկու վեկտորները* $\vec{a}$*-ն և* $\vec{b}$*-ն են: Վերցնենք կամայական A կետ և այդ կետից տեղադրենք* $\vec{a}$ *վեկտորին հավասար* $\vec{AB}$ *վեկտորը* (նկ. 70): *Այնուհետև՝ B կետից տեղադրենք* $\vec{b}$ *վեկտորին հավասար* $\vec{BC}$ *վեկտորը:* $\vec{AC}$ *վեկտորը կոչվում է* $\vec{a}$ *և* $\vec{b}$ *վեկտորների գումար:*

Վեկտորների գումարման այս կանոնը կոչվում է *եռանկյան կանոն:* Նկար 70-ի միջոցով պարզաբանվում է այդ անվանումը:



$\vec{AC} = \vec{A_1C_1} = \vec{a} + \vec{b}$

Նկ. 71

Ապացուցենք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները գումարելիս, եթե A կետը, որից տեղադրվում է $\vec{AB} = \vec{a}$ վեկտորը, փոխարինենք մեկ այլ՝ A_1 կետով, ապա $\vec{AC}$ վեկտորը փոխարինվում է իրեն հավասար $\vec{A_1C_1}$ վեկտորով: Այլ խոսքով՝ ապացուցենք, որ եթե $\vec{AB} = \vec{A_1B_1}$ և $\vec{BC} = \vec{B_1C_1}$, ապա $\vec{AC} = \vec{A_1C_1}$ (նկ. 71):

Ընդունենք, որ A, B, A_1 կետերը, B, C, B_1 կետերը և A, C, A_1 կետերը չեն գտնվում մի ուղղի վրա (մյուս դեպքերի համար պնդումն ապացուցեք ինքնուրույն): $\vec{AB} = \vec{A_1B_1}$ հավասարությունից հետևում է, որ ABB_1A_1 քառանկյան AB և A_1B_1 կողմերը

հավասար են և զուգահեռ են, ուրեմն՝ այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է: Հետևաբար՝ $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$: Նմանապես՝ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ հավասարությունից հետևում է, որ BCC_1B_1 քառանկյունը ևս զուգահեռագիծ է և, ուրեմն, $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$: Ստացված հավասարությունների հիման վրա եզրակացնում ենք, որ $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$: Ուստի՝ AA_1C_1C-ն զուգահեռագիծ է և, ուրեմն, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումարը նշանակվում է $\vec{a} + \vec{b}$:

Եթե ըստ եռանկյան կանոնի կազմենք ցանկացած $\vec{a}$ վեկտորի և զրոյական վեկտորի գումարը, ապա հանգում ենք այսպիսի եզրակացության. *ցանկացած $\vec{a}$ վեկտորի համար* տեղի ունի $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ հավասարությունը:

Եռանկյան կանոնը կարելի է ձևակերպել նաև այսպես. եթե A-ն, B-ն, C-ն կամայական կետեր են, ապա $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$: Մեկ անգամ ևս ընդգծենք, որ այս հավասարությունը տեղի ունի ցանկացած A, B, C կետերի համար, մասնավորապես նաև այն դեպքում, երբ այդ կետերից երկուսը, կամ նույնիսկ բոլոր երեքը համընկնում են:

(42) Վեկտորների գումարման օրենքները: Զուգահեռագծի կանոնը:

Թ ե ո ր ե մ : *Ցանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.*

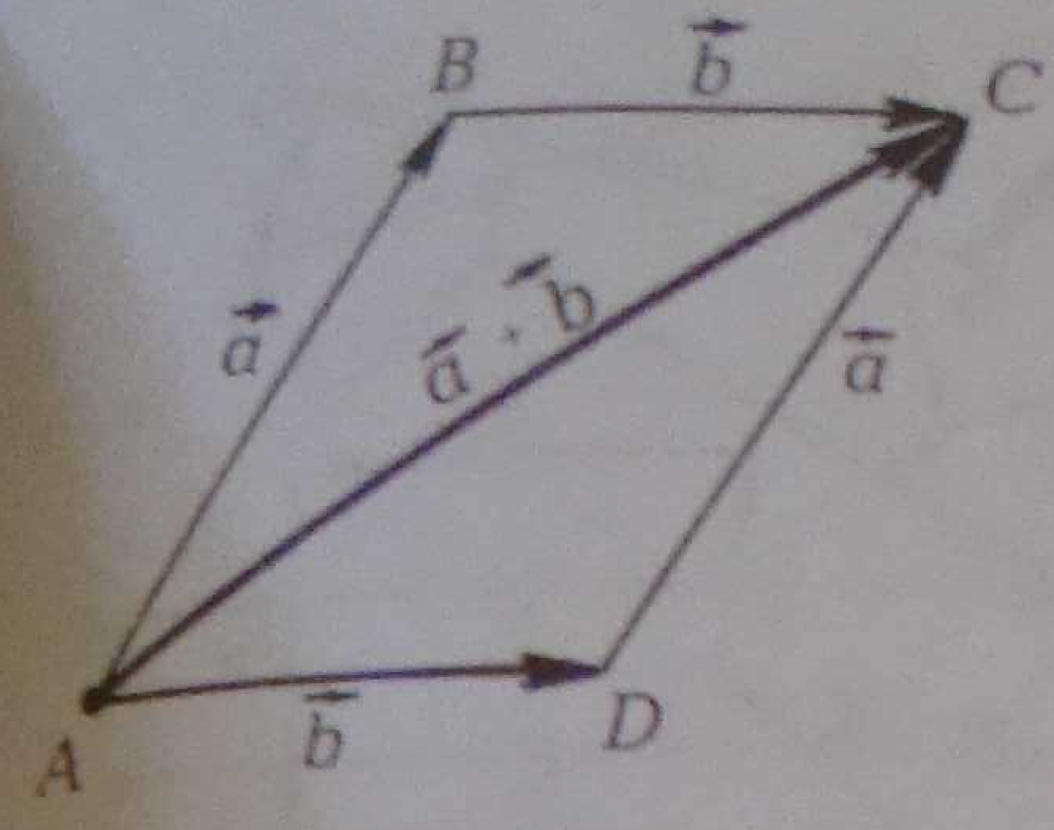
1^0. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *(տեղափոխական օրենք)*:

2^0. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ *(զուգորդական օրենք)*:

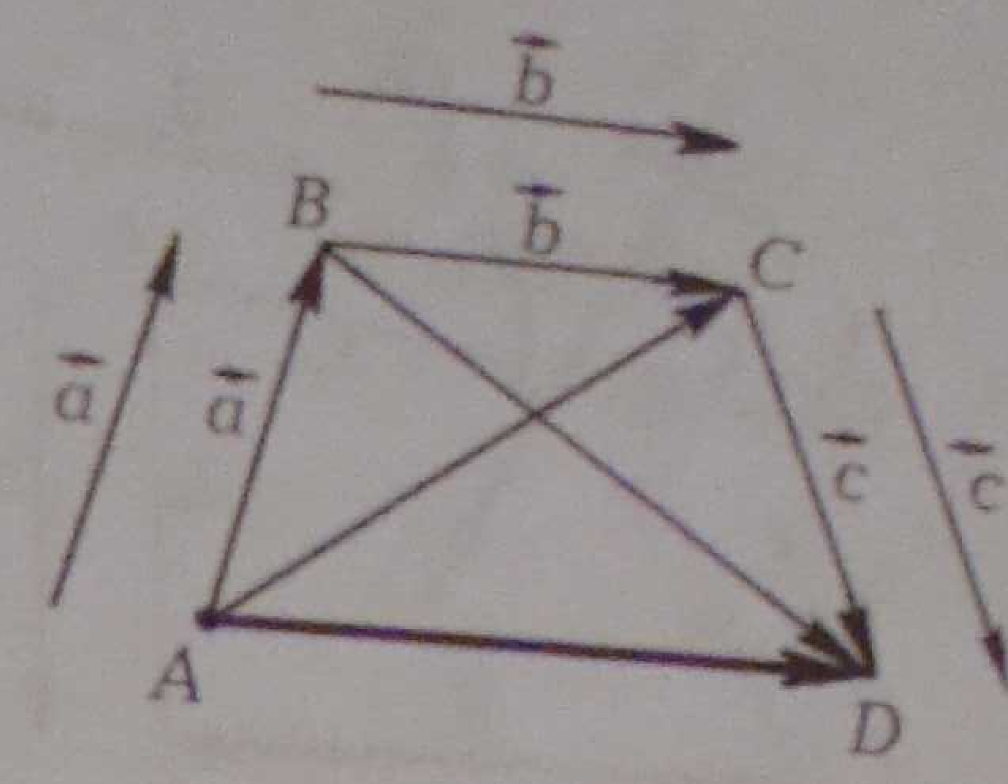
Ա պ ա ց ու ց ու մ : 1^0. Քննության առնենք այն դեպքը, երբ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ չեն (դրանց համագիծ լինելու դեպքը դիտարկեք ինքնուրույն): Կամայական A կետից տեղադրենք $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ և $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ վեկտորները և այդ վեկտորների վրա կառուցենք $ABCD$ զուգահեռագիծը, ինչպես պատկերված է նկար 72-ում:

Ըստ եռանկյան կանոնի՝ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$: Նույն կերպ ստացվում է՝ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}$: Դրանցից հետևում է, որ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$:

2^0. Կամայական A կետից տեղադրենք $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ վեկտորը, B կետից՝ $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ վեկտորը, իսկ C կետից՝ $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ վեկտորը (նկ. 73): Կիրառելով եռանկյան կանոնը՝ ստանում ենք.



Նկ. 72



Նկ. 73

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$

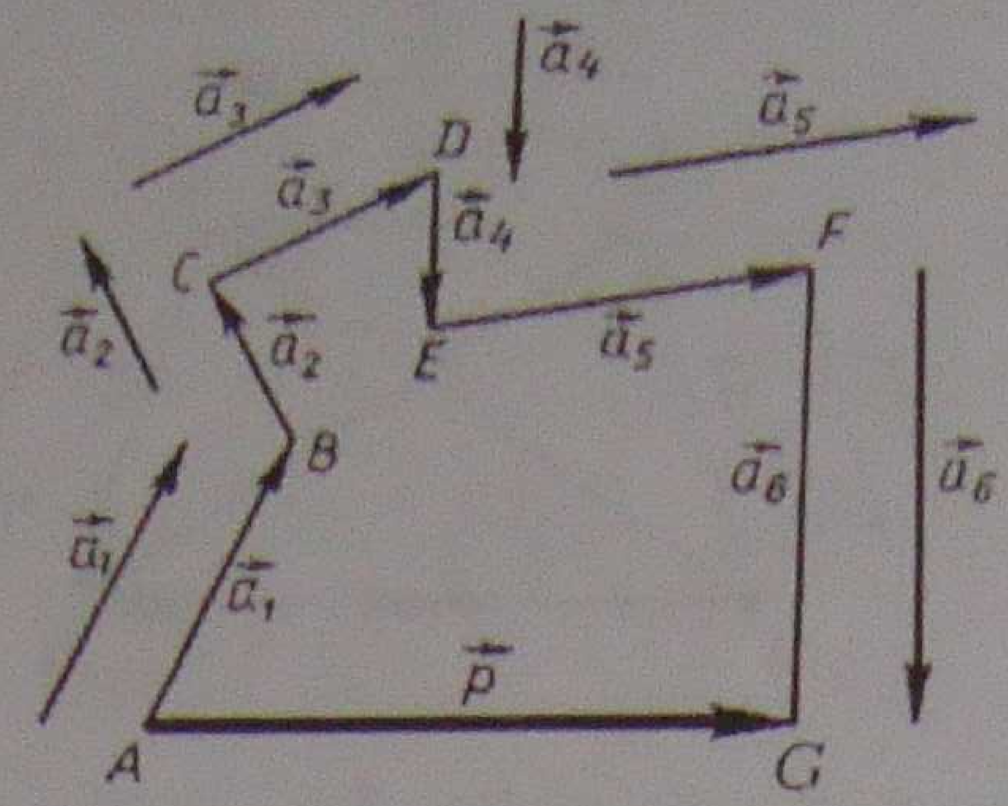
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}:$$

Ստացված հավասարություններից հետևում է, որ

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$: Թեորեմն ապացուցված է:

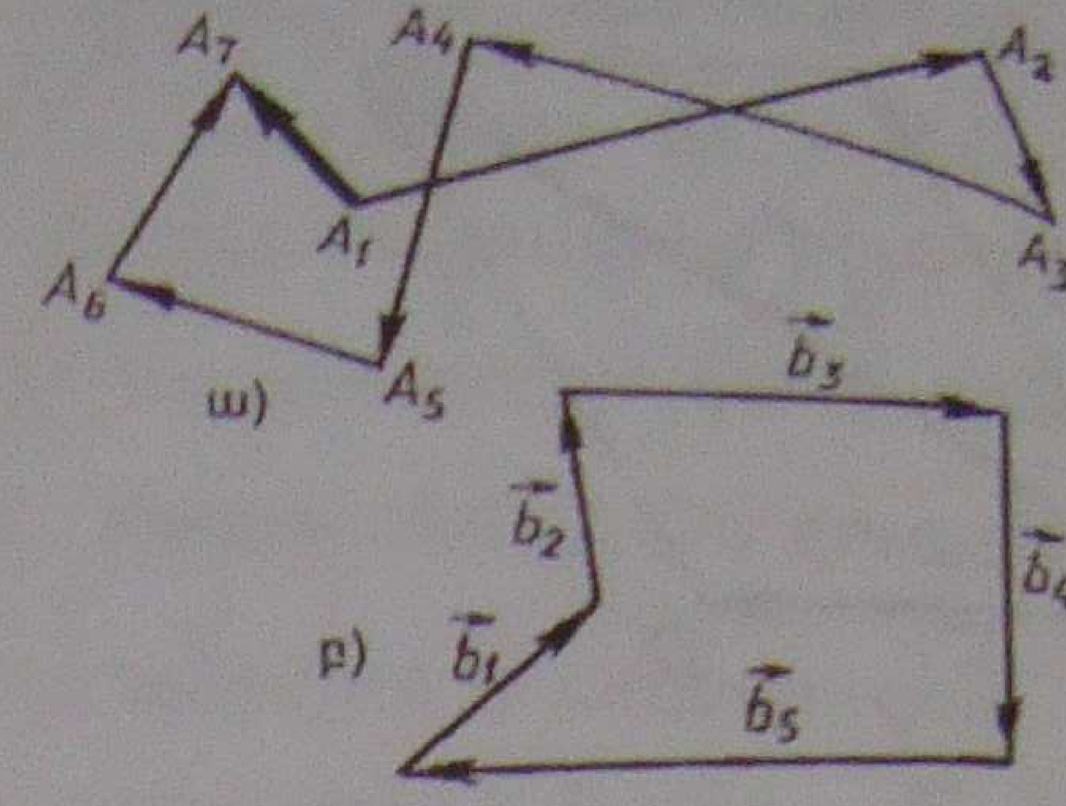
1^0 հատկության ապացուցման ընթացքում մենք հիմնավորեցինք տարագիծ վեկտորների գումարման, այսպես կոչված՝ *զուգահեռագծի կանոնը:* Ըստ այդ կանոնի՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ տարագիծ վեկտորները գումարելու համար հարկավոր է ինչ-որ A կետից տեղադրել $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ և $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ վեկտորները և կառուցել $ABCD$ զուգահեռագիծը (տես նկ. 72). այդ դեպքում $\overrightarrow{AC}$ վեկտորը հավասար է $\vec{a}+\vec{b}$: Զուգահեռագծի կանոնը հաճախակի է կիրառվում ֆիզիկայում, օրինակ՝ երկու ուժերի գումարը որոշելիս:

(43) Մի քանի վեկտորների գումարը: Մի քանի վեկտորների գումարումը կատարվում է հետևյալ կերպ. առաջին վեկտորը գումարվում է երկրորդին, այնուհետև նրանց գումարը գումարվում է երրորդ վեկտորին և այլն: Վեկտորների գումարման օրենքներից հետևում է, որ մի քանի վեկտորների գումարը կախված չէ այն բանից, թե ինչ հերթականությամբ են դրանք գումարվում: Նկար 73-ում ցուցադրված է $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների գումարի կառուցումը: Կամայական A կետից տեղադրված է $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ վեկտորը, այնուհետև B կետից տեղադրված է $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ վեկտորը և, վերջապես, C կետից տեղադրված է $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ վեկտորը: Արդյունքում ստացվում է $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ վեկտորը: Համանման ձևով կարելի է կառուցել չորս, հինգ և ընդհանրապես ցանկացած թվով վեկտորների գումարը: Նկար 74-ում ցուցադրված է վեց վեկտորների գումարի կառուցումը: Մի քանի վեկտորների գումարի կառուցման այդ կանոնը կոչվում է *բազմանկյան կանոն:* Նկար 74-ի միջոցով պարզաբանվում է այդ անվանումը:



$$\vec{p}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4+\vec{a}_5+\vec{a}_6$$

Նկ. 74



$$\vec{b}_1+\vec{b}_2+\vec{b}_3+\vec{b}_4+\vec{b}_5=\vec{0}$$

Նկ. 75

Բազմանկյան կանոնը կարելի է ձևակերպել նաև հետևյալ կերպ. եթե A_1, A_2, ... A_n-ը հարթության կամայական կետեր են, ապա $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$ (75,ա նկարում n=7): Այս հավասարությունը տեղի ունի ցանկացած A_1, A_2, ..., A_n կետերի համար, մասնավորապես նաև այն դեպքում, եթե նրանցից մի քանիսը համընկնում են: Օրինակ, եթե առաջին վեկտորի սկզբնակետը համընկնում է վերջին վեկտորի վերջնակետին, ապա այդ վեկտորների գումարը հավասար է զրոյական վեկտորի (նկ. 75,բ):

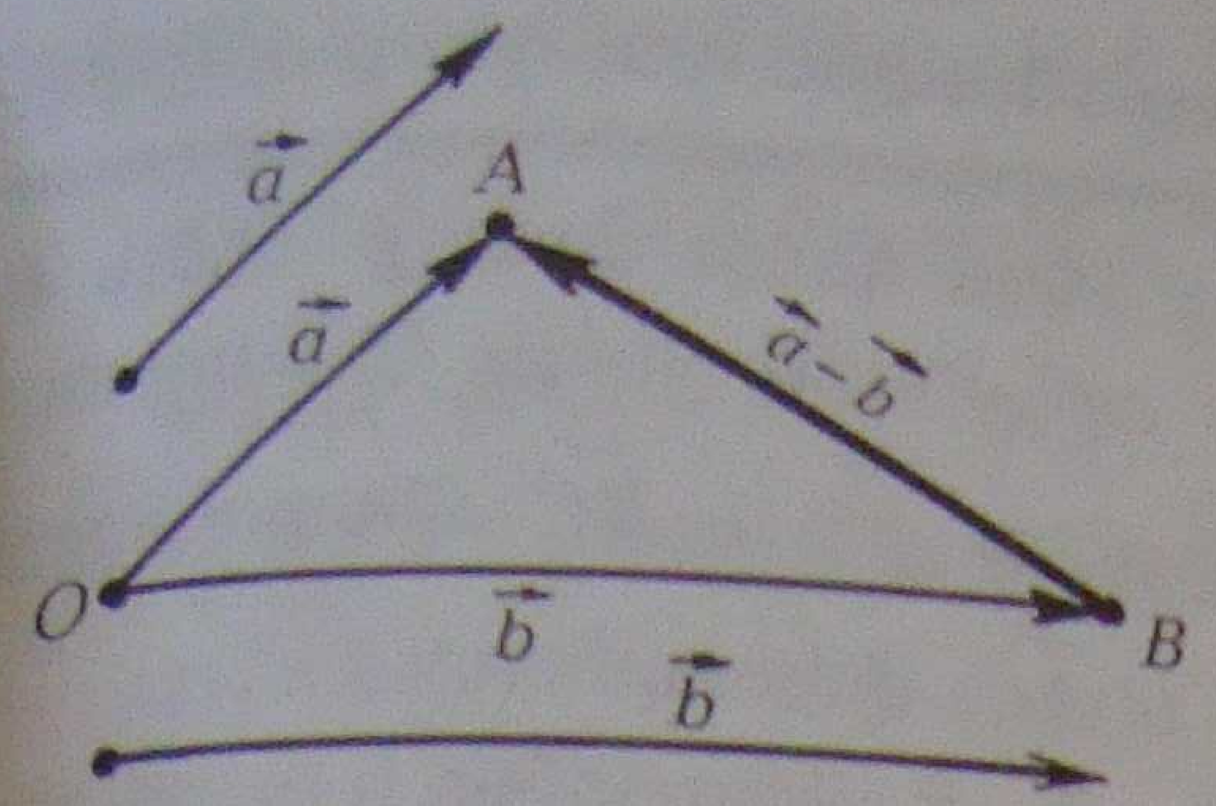
(44) Վեկտորների հանումը: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերություն կոչվում է այն վեկտորը, որի և $\vec{b}$ վեկտորի գումարը հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը նշանակվում է $\vec{a}-\vec{b}$: Դիտարկենք խնդիր՝ երկու վեկտորների տարբերությունը կառուցելու մասին:

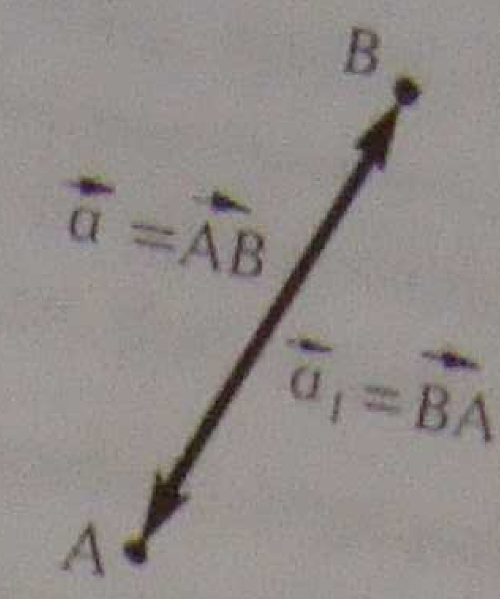
Խնդիր: *Տրված են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները: Կառուցել $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորը:*

Լուծում: Հարթության վրա նշենք կամայական O կետ և նրանից տեղադրենք $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ վեկտորները (նկ. 76): Ըստ եռանկյան կանոնի՝ $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$, կամ $\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}$: Այդպիսով՝ $\overrightarrow{BA}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումարը հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին: Ըստ վեկտորների տարբերության սահմանման՝ դա նշանակում է, որ $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$, այսինքն՝ $\overrightarrow{BA}$ վեկտորը որոնելին է:

Երկու վեկտորների տարբերությունը կառուցելու խնդիրը կարելի է լուծել նաև ուրիշ եղանակով: Մինչ կնկարագրենք այդ եղանակը, ներմուծենք *հակադիր վեկտորի* հասկացությունը:



Նկ. 76



$\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{AA}=\vec{0}$

Նկ. 77

Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն կամայական ոչ զրոյական վեկտոր է: $\vec{a}_1$ վեկտորը կոչվում է $\vec{a}$ վեկտորին հակադիր, եթե $\vec{a}_1$ և $\vec{a}$ վեկտորներն ունեն հավասար երկարություն և հակուղղված են: Նկար 77-ում $\vec{a}_1=\vec{BA}$ վեկտորը հակադիր է $\vec{a}=\vec{AB}$ վեկտորին: Զրոյական վեկտորին հակադիր է համարվում զրոյական վեկտորը:

$\vec{a}$ վեկտորի հակադիր վեկտորը նշանակվում է $-\vec{a}$: Ակնհայտ է, որ $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$:

Ապացուցենք թեորեմ վեկտորների տարբերության մասին:

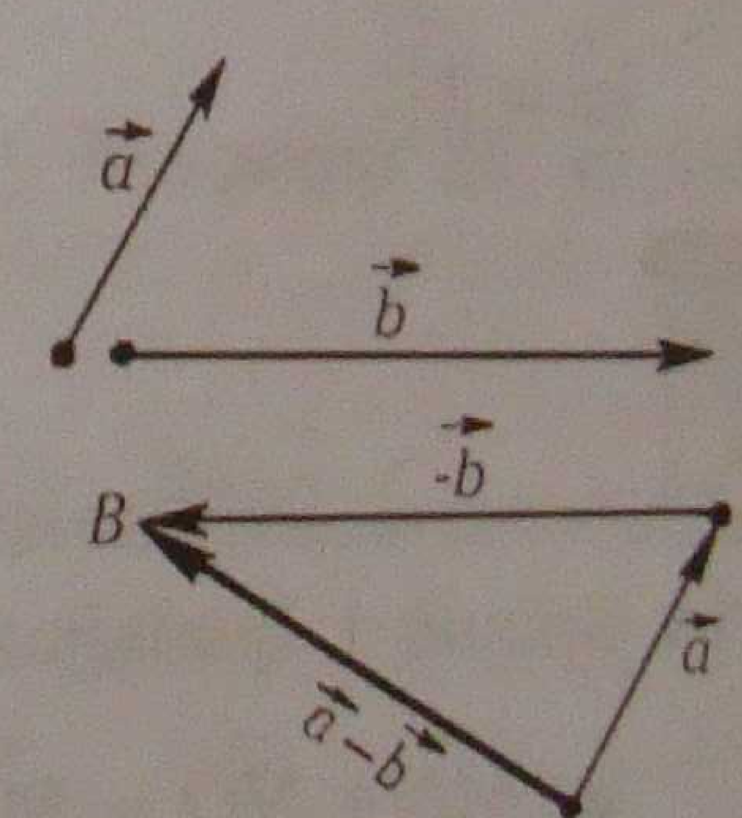
Թ ե ո ր ե մ: *Ցանկացած $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների համար տեղի ունի $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ հավասարությունը:*

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Ըստ վեկտորների տարբերության սահմանման՝ $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{b}=\vec{a}$: Այս հավասարության երկու մասին $-\vec{b}$ ավելացնելով՝ ստանում ենք.

$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{b}+\left(-\vec{b}\right)=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, կամ՝

$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{0}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, որտեղից

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$: Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 78

Այժմ բերենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը կառուցելու խնդրի մեկ այլ լուծում: Հարթության վրա նշենք կամայական O կետ և այդ կետից տեղադրենք $\vec{OA}=\vec{a}$ վեկտորը (նկ. 78): Այնուհետև A կետից տեղադրենք $\vec{AB}=-\vec{b}$ վեկտորը: Ըստ վեկտորների տարբերության մասին թեորեմի՝ $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$: Ուրեմն՝ $\vec{a}-\vec{b}=\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$:

Այսինքն՝ $\vec{OB}$ վեկտորը որոնելին է:

308. Զբոսաշրջիկը A քաղաքից գնաց 20կմ դեպի արևելք՝ մինչև B քաղաքը, իսկ հետո՝ 30կմ դեպի արևմուտք՝ մինչև C քաղաքը:

Ընտրելով մի հարմար մասշտաբ՝ գծեք $\vec{AB}$ և $\vec{BC}$ վեկտորները:

Հավասա՞ր են, արդյոք, $\vec{AB}+\vec{BC}$ և $\vec{AC}$ վեկտորները:

309. Գծեք զույգ առ զույգ տարագիծ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ վեկտորներ և կառուցեք $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{x}+\vec{z}$, $\vec{z}+\vec{y}$ վեկտորները:

310. Գծեք զույգ առ զույգ տարագիծ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ վեկտորներ և, օգտվելով բազմանկյան կանոնից, կառուցեք $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$ վեկտորը:

311. Գծեք զույգ առ զույգ տարագիծ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ վեկտորներ և կառուցեք $\vec{x}-\vec{y}$, $\vec{z}-\vec{y}$, $\vec{x}-\vec{z}$, $-\vec{x}$, $-\vec{y}$, $-\vec{z}$ վեկտորները:

312. Գծեք $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ վեկտորներն այնպես, որ $\vec{x}\uparrow\uparrow\vec{y}$, $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{z}$: Կառուցեք $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{y}-\vec{z}$, $\vec{x}+\vec{z}$ վեկտորները:

313. Գծեք երկու՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ոչ զրոյական համագիծ վեկտորներ այնպես, որ $|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$: Կառուցեք հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{a}-\vec{b}$, **բ)** $\vec{b}-\vec{a}$, **գ)** $-\vec{a}+\vec{b}$: Կառուցումը կատարեք նաև այն դեպքի համար, երբ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$:

Հարցեր և խնդիրներ

314. Տրված է կամայական քառանկյուն՝ $MNPQ$-ն: Ապացուցեք, որ. **ա)** $\vec{MN}+\vec{NQ}=\vec{MP}+\vec{PQ}$, **բ)** $\vec{MN}+\vec{NP}=\vec{MQ}+\vec{QP}$:

315. Ապացուցեք, որ ցանկացած երկու՝ $\vec{x}$ և $\vec{y}$ տարագիծ վեկտորների համար տեղի ունի $|\vec{x}+\vec{y}|<|\vec{x}|+|\vec{y}|$ անհավասարությունը:

316. Ապացուցեք, որ եթե A-ն, B-ն, C-ն և D-ն կամայական կետեր են, ապա $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA}=\vec{0}$:

317. ABC հավասարակողմ եռանկյան կողմը a է: Գտեք. **ա)** $|\vec{AB}+\vec{BC}|$, **բ)** $|\vec{AB}+\vec{AC}|$, **գ)** $|\vec{AB}+\vec{CB}|$, **դ)** $|\vec{BA}-\vec{BC}|$, **ե)** $|\vec{AB}-\vec{AC}|$:

318. ABC եռանկյան մեջ $AB=6$, $BC=8$, $\angle B=90^0$: Գտեք. **ա)** $|\vec{BA}|-|\vec{BC}|$ և $|\vec{BA}-\vec{BC}|$, **բ)** $|\vec{AB}|+|\vec{BC}|$ և $|\vec{AB}+\vec{BC}|$, **գ)** $|\vec{BA}|+|\vec{BC}|$ և $|\vec{BA}+\vec{BC}|$, **դ)** $|\vec{AB}|-|\vec{BC}|$ և $|\vec{AB}-\vec{BC}|$:

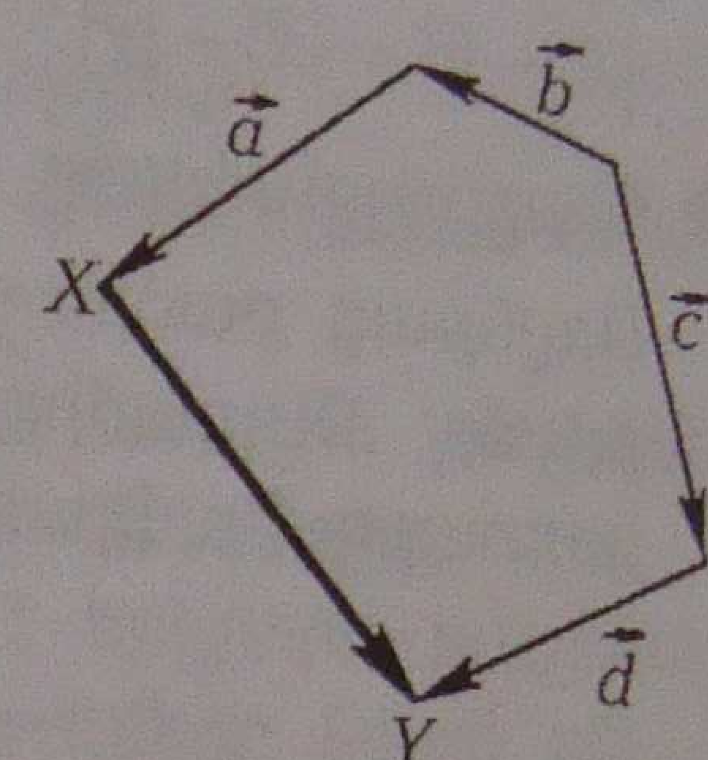
319. Օգտվելով բազմանկյան կանոնից՝ պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $(\vec{AB}+\vec{BC}-\vec{MC})+(\vec{MD}-\vec{KD})$,

բ) $(\vec{CB}+\vec{AC}+\vec{BD})-(\vec{MK}+\vec{KD})$:

320. Դիցուք՝ X-ը, Y-ը և Z-ը կամայական կետեր են: Ապացուցեք, որ $\vec{p}=\vec{XY}+\vec{ZX}+\vec{YZ}$, $\vec{q}=(\vec{XY}-\vec{XZ})+\vec{YZ}$ և $\vec{r}=(\vec{ZY}-\vec{XY})-\vec{ZX}$ վեկտորները զրոյական են:

321. Նկար 79-ում պատկերված են $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{XY}$ վեկտորները: $\vec{XY}$ վեկտորը ներկայացրեք մյուս վեկտորների կամ դրանց հակադիրների գումարի տեսքով:



Նկ. 79

322. Տրված է ABC եռանկյունը: $\vec{a}=\vec{AB}$ և $\vec{b}=\vec{AC}$ վեկտորների միջոցով արտահայտեք հետևյալ վեկտորները՝ **ա)** $\vec{BA}$, **բ)** $\vec{CB}$, **գ)** $\vec{CB}+\vec{BA}$:

Լ ու ծ ու մ . **ա)** $\vec{BA}$ և $\vec{AB}$ վեկտորները հակադիր են, ուրեմն $\vec{BA}=-\vec{AB}$, կամ $\vec{BA}=-\vec{a}$:

բ) Ըստ եռանկյան կանոնի՝ $\vec{CB}=\vec{CA}+\vec{AB}$: Բայց $\vec{CA}=-\vec{AC}$, ուրեմն՝ $\vec{CB}=\vec{AB}+(-\vec{AC})=\vec{AB}-\vec{AC}=\vec{a}-\vec{b}$:

գ) $\vec{CB}+\vec{BA}=\vec{CA}=-\vec{AC}=-\vec{b}$:

323. ABC եռանկյան AB և AC կողմերի միջնակետերն են M-ը և N-ը: $\vec{BM}$, $\vec{NC}$, $\vec{MN}$, $\vec{BN}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{a}=\vec{AM}$ և $\vec{b}=\vec{AN}$ վեկտորների միջոցով:

324. BB_1 հատվածը ABC եռանկյան միջնագիծն է: $\vec{B_1C}$, $\vec{BB_1}$, $\vec{BA}$, $\vec{BC}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{x}=\vec{AB_1}$ և $\vec{y}=\vec{AB}$ վեկտորների միջոցով:

325. Տրված է $ABCD$ զուգահեռագիծը: $\vec{AC}$ վեկտորն արտահայտեք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով, եթե. **ա)** $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{BC}$, **բ)** $\vec{a} = \vec{CB}$, $\vec{b} = \vec{CD}$, **գ)** $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{DA}$:

326. $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում: $\vec{a} = \vec{AB}$ և $\vec{b} = \vec{AD}$ վեկտորների միջոցով արտահայտեք հետևյալ վեկտորները. $\vec{DC} + \vec{CB}$, $\vec{BO} + \vec{OC}$, $\vec{BO} - \vec{OC}$, $\vec{BA} - \vec{DA}$:

327. Տրված է $ABCD$ զուգահեռագիծը: Ապացուցեք, որ $\vec{XA} + \vec{XC} = \vec{XB} + \vec{XD}$, որտեղ X-ը հարթության կամայական կետ է:

328. Ապացուցեք, որ ցանկացած երկու՝ $\vec{x}$ և $\vec{y}$ վեկտորների համար տեղի ունի $|\vec{x} - \vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|$ անհավասարությունը: Ո՞ր դեպքում է $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$:

329. Պարաշյուտիստը վայրէջք էր կատարում 3մ/վ արագությամբ: Սրընթաց քամին սկսում է նրան կողքի քշել $3\sqrt{3}$ մ/վ արագությամբ: Ուղղաձիգի նկատմամբ ի՞նչ անկյան տակ է վայրէջք կատարում պարաշյուտիստը:

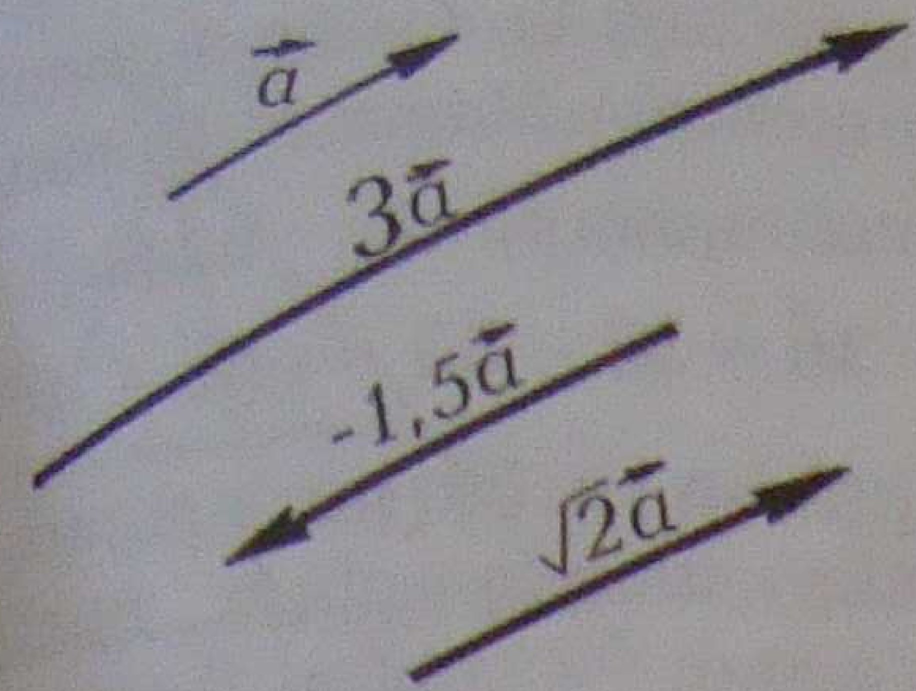
§ 3 ՎԵԿՏՈՐԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄԸ ԹՎՈՎ: ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԼՈՒԾԵԼԻՍ:

45 **Վեկտորի և թվի արտադրյալը:** *Ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտորի և k թվի արտադրյալ կոչվում է այն $\vec{b}$ վեկտորը, որի երկարությունը հավասար է $|k| \cdot |\vec{a}|$, ընդ որում՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են՝ եթե $k \ge 0$, և հակուղղված են՝ եթե $k < 0$: Զրոյական վեկտորի և կամայական թվի արտադրյալը համարվում է զրոյական վեկտոր:*

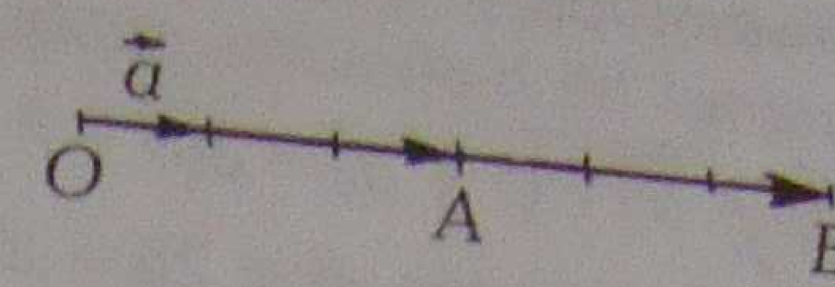
$\vec{a}$ վեկտորի և k թվի արտադրյալը նշանակվում է $k\vec{a}$: Նկար 80-ում պատկերված են $\vec{a}$ վեկտորը և $3\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$, $\sqrt{2}\vec{a}$ վեկտորները:

Վեկտորի և թվի արտադրյալի սահմանումից հետևում է, որ. 1)*ցանկացած վեկտորի և զրո թվի արտադրյալը զրոյական վեկտոր է,* 2)*ցանկացած k թվի և ցանկացած վեկտորի համար $\vec{a}$ և $k\vec{a}$ վեկտորները համագիծ են:*

Վեկտորի և թվի արտադրյալը օժտված է մի քանի հիմնական հատկություններով:



Նկ. 80



Նկ. 81

Ցանկացած k, ℓ թվերի և ցանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

1^0. $(k\ell)\vec{a} = k(\ell\vec{a})$ *(զուգորդական օրենք)*

2^0. $(k+\ell)\vec{a} = k\vec{a} + \ell\vec{a}$ *(առաջին բաշխական օրենք)*

3^0. $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ *(երկրորդ բաշխական օրենք)*

Նկար 81-ում, օրինակով պարզաբանված է զուգորդական օրենքը: Այդ նկարում ներկայացված է $k=2$, $\ell = 3$ դեպքը:

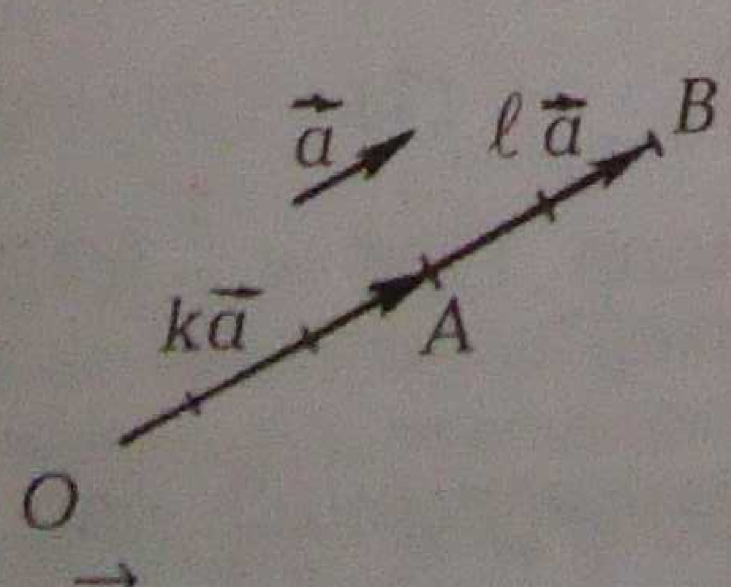
Նկար 82-ում օրինակով պարզաբանված է առաջին բաշխական օրենքը: Այդ նկարում ներկայացված է $k = 3$, $\ell = 2$ դեպքը:

Նկար 83-ում օրինակով պարզաբանված է երկրորդ բաշխական օրենքը: Այդ նկարում OAB և OA_1B_1 եռանկյունները նման են, k-ն նմանության գործակիցն է, ուստի՝ $\overrightarrow{OA} = k\vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = k\vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = k(\vec{a}+\vec{b})$:

Մյուս կողմից՝ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = k\vec{a} + k\vec{b}$:

Այսպիսով՝ $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$:

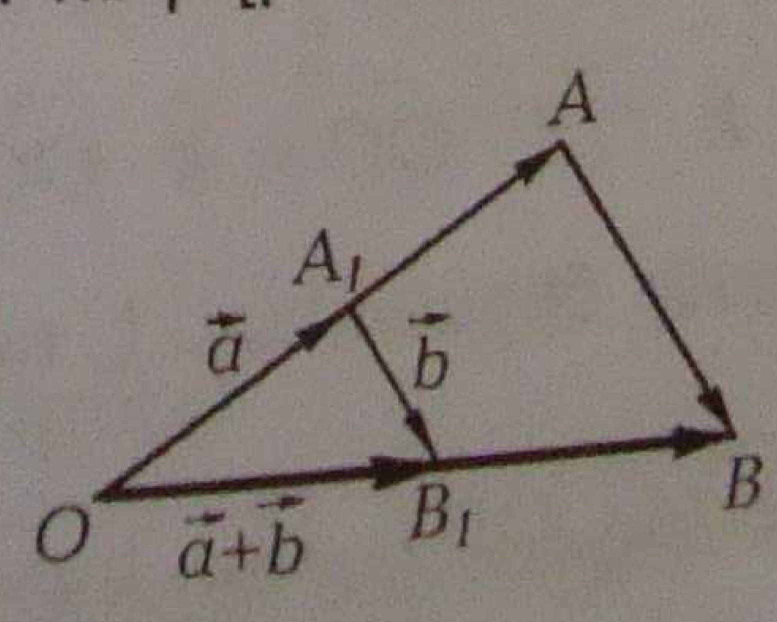
Պ ա ր զ ա բ ա ն ու մ: Մեր դիտարկած վեկտորների հետ կատարվող գործողությունների հատկությունները թույլ են տալիս որոշ ընդհանրություններ տեսնել այդ և հանրահաշվական գործողությունների հատկությունների միջև: Նկատենք, որ վեկտորների գումար, տարբերություն և վեկտորի ու թվի արտադրյալ պարունակող արտա-



$\overrightarrow{OA} = k\vec{a};\ \overrightarrow{AB} = \ell\vec{a}$

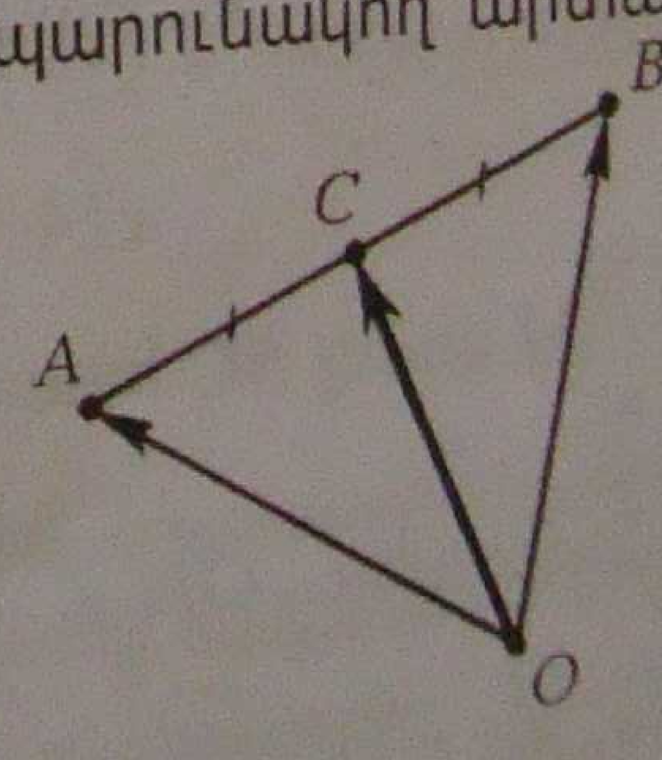
$\overrightarrow{OB} = (k+\ell)\vec{a} = k\vec{a} + \ell\vec{a}$

Նկ. 82



$\overrightarrow{OB} = k(\vec{a}+\vec{b})a = k\vec{a} + \ell\vec{a}$

Նկ. 83



Նկ. 84

հայտությունները կարող ենք ձևափոխել ըստ այն կանոնների, որոնք կիրառվում են հանրահաշվական արտահայտություններում: Օրինակ, $\vec{p} = 2(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{a}) - 3(\vec{b} - \vec{c} + \vec{a})$ արտահայտությունը կարելի է ձևափոխել այսպես. $\vec{p} = 2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c} - 3\vec{a} = -5\vec{b} + 4\vec{c}$:

46 **Վեկտորների կիրառությունը խնդիրներ լուծելիս:** Երկրաչափական խնդիրներ լուծելու և թեորեմներ ապացուցելու համար հաճախ հարմար է օգտվել վեկտորներից: Բերենք այդպիսի օրինակներ՝ նախապես լուծելով մի օժանդակ խնդիր:

Խ ն դ ի ր 1: *C կետը AB հատվածի միջնակետն է, իսկ O կետը՝ հարթության կամայական կետ* (նկ. 84): *Ապացուցել, որ*

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}):$$

Լ ու ծ ու մ: Ըստ եռանկյան կանոնի՝ $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$, $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$: Գումարելով այս հավասարությունները՝ ստանում ենք. $2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} + (\vec{AC} + \vec{BC})$: Քանի որ C կետը AB հատվածի միջնակետն է, ապա $\vec{AC} + \vec{BC} = \vec{0}$: Այսպիսով՝ $2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$, կամ $\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$:

Խ ն դ ի ր 2: *Ապացուցել, որ սեղանի հիմքերի միջնակետով տարված ուղիղն անցնում է սրունքների շարունակությունների հատման կետով:*

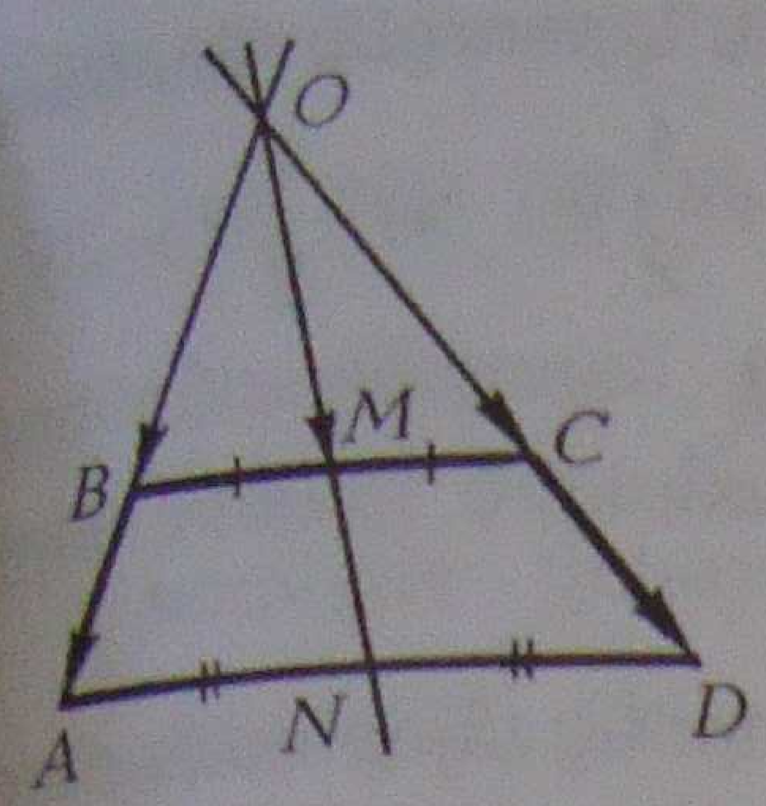
Լ ու ծ ու մ: Դիցուք՝ $ABCD$-ն տրված սեղանն է, M-ը և N-ը BC և AD հիմքերի միջնակետերն են, իսկ O-ն AB և CD ուղիղների հատման կետն է (նկ. 85): Ապացուցենք, որ O կետն ընկած է MN ուղղի վրա:

OAD և OBC եռանկյունները նման են ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի (բացատրեք՝ ինչու): Ուրեմն $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} = k$: Քանի որ $\vec{OB} \uparrow\uparrow \vec{OA}$ և $\vec{OC} \uparrow\uparrow \vec{OD}$, ապա

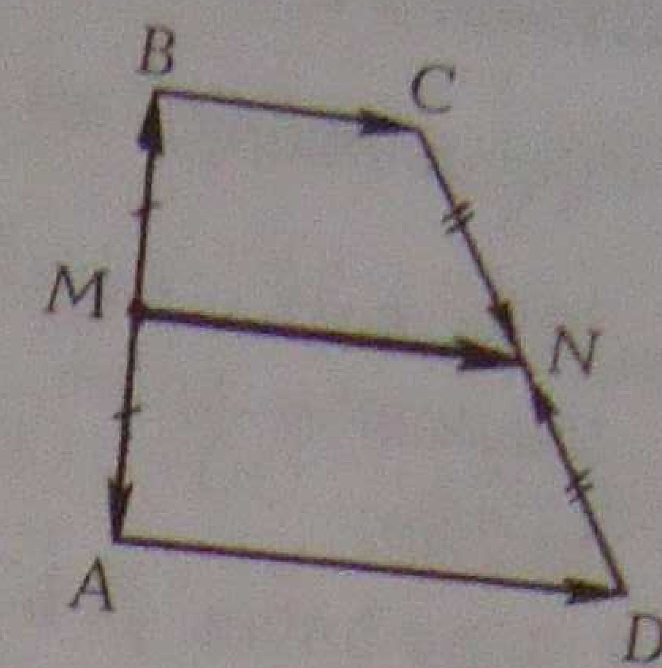
$$\vec{OA} = k \cdot \vec{OB}, \ \vec{OD} = k \cdot \vec{OC}: \qquad (1)$$

M կետը BC հատվածի միջնակետն է, ուստի՝ $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC})$:

Նմանապես՝ $\vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD})$: Այս հավասարության մեջ տեղադրելով (1) արտահայտությունները $\vec{OA}$-ի և $\vec{OD}$-ի համար՝ ստանում ենք $\vec{ON} = k \cdot \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) = k \cdot \vec{OM}$:



Նկ. 85



Նկ. 86

Դրանից հետևում է, որ $\vec{ON}$ և $\vec{OM}$ վեկտորները համագիծ են և, ուրեմն, O կետը գտնվում է MN ուղղի վրա:

Խ ն դ ի ր 3 : (Սեղանի միջին գծի հատկությունը): *Ապացուցել, որ սեղանի միջին գիծը զուգահեռ է նրա հիմքերին և հավասար է դրանց կիսագումարին:*

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ : Դիցուք՝ $ABCD$ սեղանի AB և CD սրունքների միջնակետերն են M-ը և N-ը (նկ. 86): Ապացուցենք, որ $MN \parallel AD$ և $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$:

Ըստ բազմանկյան կանոնի՝ $\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BC} + \vec{CN}$ և $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DN}$: Գումարելով այս հավասարությունները՝ ստանում ենք. $2\vec{MN} = (\vec{MB} + \vec{MA}) + (\vec{BC} + \vec{AD}) + (\vec{CN} + \vec{DN})$: Քանի որ M-ը և N-ը AB և CD հատվածների միջնակետերն են, ապա $\vec{MB} + \vec{MA} = \vec{0}$ և $\vec{CN} + \vec{DN} = \vec{0}$: Հետևաբար՝ $2\vec{MN} = \vec{AD} + \vec{BC}$, որտեղից՝ $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$: Քանի որ $\vec{AD}$ և $\vec{BC}$ վեկտորները համուղղված են, ապա $\vec{MN}$ և $\vec{AD}$ վեկտորները ևս համուղղված են, իսկ $(\vec{AD} + \vec{BC})$ վեկտորի երկարությունը հավասար է $AD+BC$: Դրանից հետևում է, որ $MN \parallel AD$ և $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Գործնական առաջադրանքներ

330. Գծեք երկու՝ $\bar{p}$ և $\vec{q}$ տարագիծ վեկտորներ, որոնց սկզբնակետերը չեն համընկնում, և նշեք որևէ O կետ: O կետից տեղադրեք $2\bar{p}$-ին և $\frac{1}{2}\vec{q}$-ին հավասար վեկտորներ:

331. Գծեք երկու՝ $\vec{x}$ և $\vec{y}$ տարագիծ վեկտորներ և կառուցեք հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{x}+2\vec{y}$, **բ)** $\frac{1}{2}\vec{y}+\vec{x}$, **գ)** $3\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$, **դ)** $1\frac{1}{2}\vec{x}-3\vec{y}$, **ե)** $0\vec{x}+3\vec{y}$, **զ)** $-2\vec{x}+0\vec{y}$: Այդ նույն՝ **ա)-զ)** առաջադրանքները կատարեք երկու՝ $\vec{x}$ և $\vec{y}$ ոչ զրոյական՝ համագիծ վեկտորների համար:

332. Գծեք երկու՝ $\vec{p}$ և $\vec{q}$ տարագիծ վեկտորներ, որոնց սկզբնակետերը չեն համընկնում: Կառուցեք $\vec{m}=2\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{n}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{i}=-2\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{s}=\frac{2}{3}\vec{q}-\vec{p}$ վեկտորները:

333. Գծեք զույգ առ զույգ տարագիծ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները: Կառուցեք վեկտորը՝ **ա)** $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$, **բ)** $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$:

Խնդիրներ

334. Տրված է $\vec{p}=3\vec{a}$ վեկտորը, որտեղ $\vec{a}\neq\vec{0}$: Որոշեք, թե $\vec{a}$, $-\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $6\vec{a}$ վեկտորներից յուրաքանչյուրը ինչպես է ուղղված p վեկտորի նկատմամբ: Այդ վեկտորների երկարությունները արտահայտեք $|\vec{p}|$-ի միջոցով:

335. Ապացուցեք, որ ցանկացած $\vec{a}$ վեկտորի համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները. **ա)** $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, **բ)** $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$:

336. Դիցուք՝ $\vec{x}=\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{y}=\vec{m}-\vec{n}$: $\vec{m}$ և $\vec{n}$ վեկտորների միջոցով արտահայտեք. **ա)** $2\vec{x}-2\vec{y}$, **բ)** $2\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$, **գ)** $-x-\frac{1}{3}\vec{y}$ վեկտորները:

337. $ABCD$ զուգահեռագծի AD կողմի միջնակետը E կետն է, իսկ BC կողմի միջնակետը՝ G կետը: $\vec{EC}$ և $\vec{AG}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{DC}=\vec{a}$ և $\vec{CB}=\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

338. $ABCD$ զուգահեռագծի BC կողմի վրա նշված է M կետն այնպես, որ $BM:MC=3:1$: $\vec{AM}$ և $\vec{MD}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{a}=\vec{AD}$ և $\vec{b}=\vec{AB}$ վեկտորների միջոցով:

339. $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում, իսկ AD կողմի վրա M կետն այնպիսին է, որ $AM = \frac{1}{2}MD$: $\vec{x} = \vec{AD}$ և $\vec{y} = \vec{AB}$ վեկտորների միջոցով արտահայտեք հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{AC}$, $\vec{AO}$, $\vec{CO}$, $\vec{DO}$, $\vec{AD} + \vec{BC}$, $\vec{AD} + \vec{CO}$, $\vec{CO} + \vec{OA}$, **բ)** $\vec{AM}$, $\vec{MC}$, $\vec{BM}$, $\vec{OM}$:

340. $ABCD$ քառանկյան AC և BD անկյունագծերի միջնակետերն են M-ը և N-ը: Ապացուցեք, որ $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{CB})$:

341. AA_1, BB_1, և CC_1 հատվածները ABC եռանկյան միջնագծերն են: $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$, $\vec{CC_1}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{a} = \vec{AC}$ և $\vec{b} = \vec{AB}$ վեկտորների միջոցով:

342. O կետը DEF եռանկյան EG միջնագծի միջնակետն է: $\vec{DO}$ վեկտորն արտահայտեք $\vec{a} = \vec{ED}$ և $\vec{b} = \vec{EF}$ վեկտորների միջոցով:

Վեկտորների կիրառությունը խնդիրներ լուծելիս

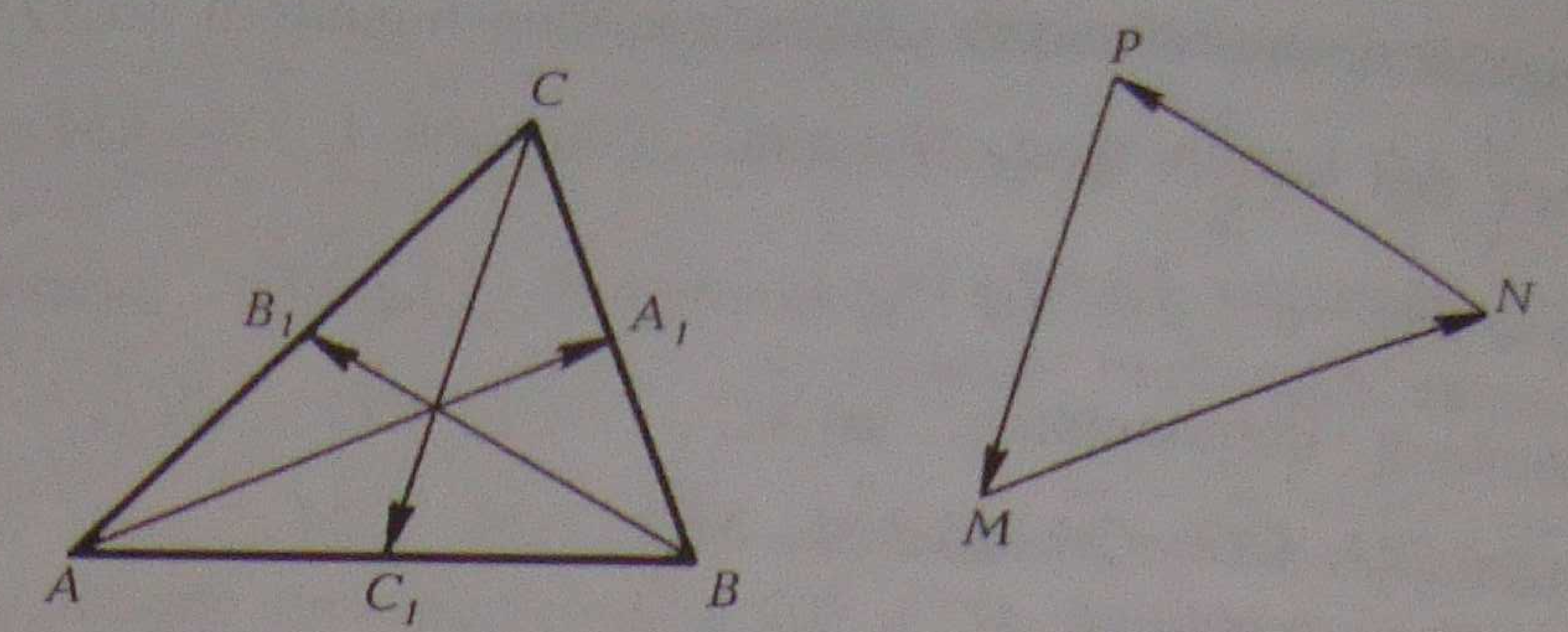
343. Տրված է ABC կամայական եռանկյունը: Ապացուցեք, որ գոյություն ունի այնպիսի եռանկյուն, որի կողմերը համապատասխանաբար հավասար են և զուգահեռ ABC եռանկյան միջնագծերին:

Լ ու ծ ու մ: Դիցուք՝ ABC եռանկյան միջնագծերն են AA_1-ը, BB_1-ը և CC_1-ը: Այդ դեպքում $\vec{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$, $\vec{BB_1} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BA})$, $\vec{CC_1} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$ (տե՛ս խնդիր 1-ը կետ 46-ում):

Գումարելով այս հավասարությունները՝ ստանում ենք

$$\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \frac{1}{2}((\vec{AB} + \vec{BA}) + (\vec{AC} + \vec{CA}) + (\vec{CB} + \vec{BC})) = \vec{0}:$$

Դրանից հետևում է, որ եթե մենք կառուցենք $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$ և $\vec{CC_1}$ վեկտորների գումարը՝ ըստ բազմանկյան կանոնի, ապա կստանանք խնդրի պահանջներին բավարարող եռանկյուն (դա MNP եռանկյունն է նկար 87-ում):



$$\vec{MN} = \vec{AA_1},\ \vec{NP} = \vec{BB_1},\ \vec{PM} = \vec{CC_1}$$

Նկ. 87

344. ABC եռանկյան կողմերի վրա կառուցված են ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1 զուգահեռագծերը: Ապացուցեք, որ գոյություն ունի եռանկյուն, որի կողմերը համապատասխանաբար հավասար են և զուգահեռ A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 հատվածներին:

345. Ապացուցեք, որ սեղանի անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածը զուգահեռ է սեղանի հիմքերին և հավասար է դրանց կիսատարբերությանը:

346. Ապացուցեք, որ կամայական քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները հատման կետով կիսվում են:

347. Ապացուցեք եռանկյան միջին գծի մասին թեորեմը:

§ 4 ՏԱՐԱԳԻԾ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ

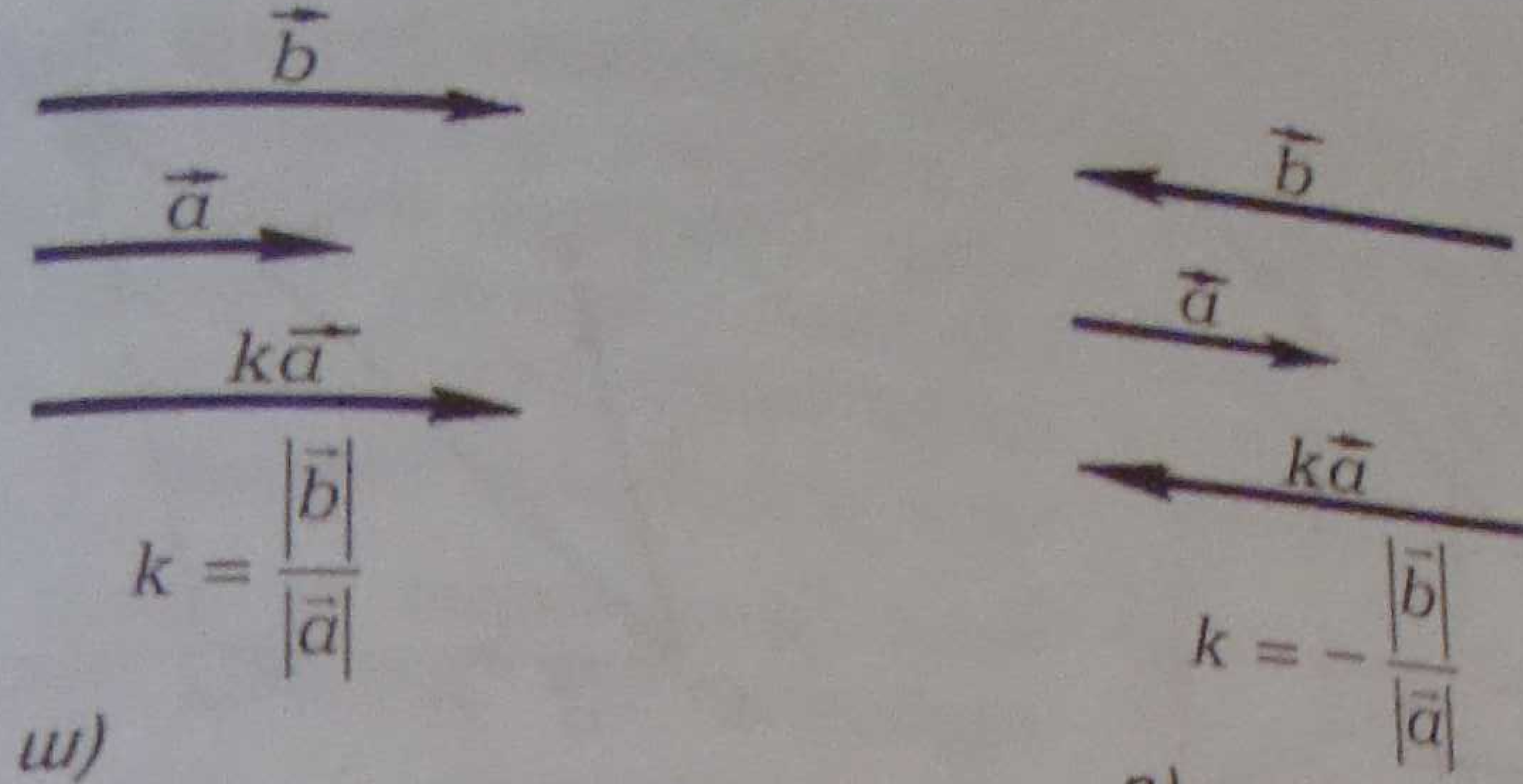
47 Վեկտորի վերածումը ըստ երկու փարագիծ վեկտորների:

Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն տրված վեկտորներ են: Եթե $\vec{p}$ վեկտորը ներկայացվում է $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ տեսքով, որտեղ x-ը և y-ը որևէ թվեր են, ապա ասում են, որ *$\vec{p}$ վեկտորը վերածվում է ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների*. x և y թվերը կոչվում են *վերածման գործակիցներ:*

Քննության առնենք այն հարցը, թե հնարավո՞ր է, ըստ տրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների, վերածել ցանկացած $\vec{p}$ վեկտորը: Դրա համար նախ ապացուցենք մի լեմմ* համագիծ վեկտորների մասին:

Լ ե մ մ : Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, և $\vec{a} \neq 0$, ապա գոյություն ունի այնպիսի k թիվ, որ $\vec{b} = k\vec{a}$:

* *Լեմմ* կոչվում է այն օժանդակ թեորեմը, որի օգնությամբ ապացուցվում է հաջորդ թեորեմը կամ մի քանի այլ թեորեմներ:



Նկ. 88

Ապացուցում: Հնարավոր են երկու դեպք. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ և $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$: Քննության առնենք այս դեպքերից յուրաքանչյուրն առանձին:

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$: Դիտարկենք $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ թիվը: Քանի որ $k \geq 0$, ապա $k\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են (նկ. 88,ա): Բացի այդ՝ դրանց երկարությունները հավասար են. $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$: Ուրեմն՝ $\vec{b} = k\vec{a}$:

2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$: Դիտարկենք $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ թիվը: Քանի որ $k < 0$, ապա $k\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները դարձյալ համուղղված են (նկ. 88,բ): Դրանց երկարությունները նույնպես հավասար են.

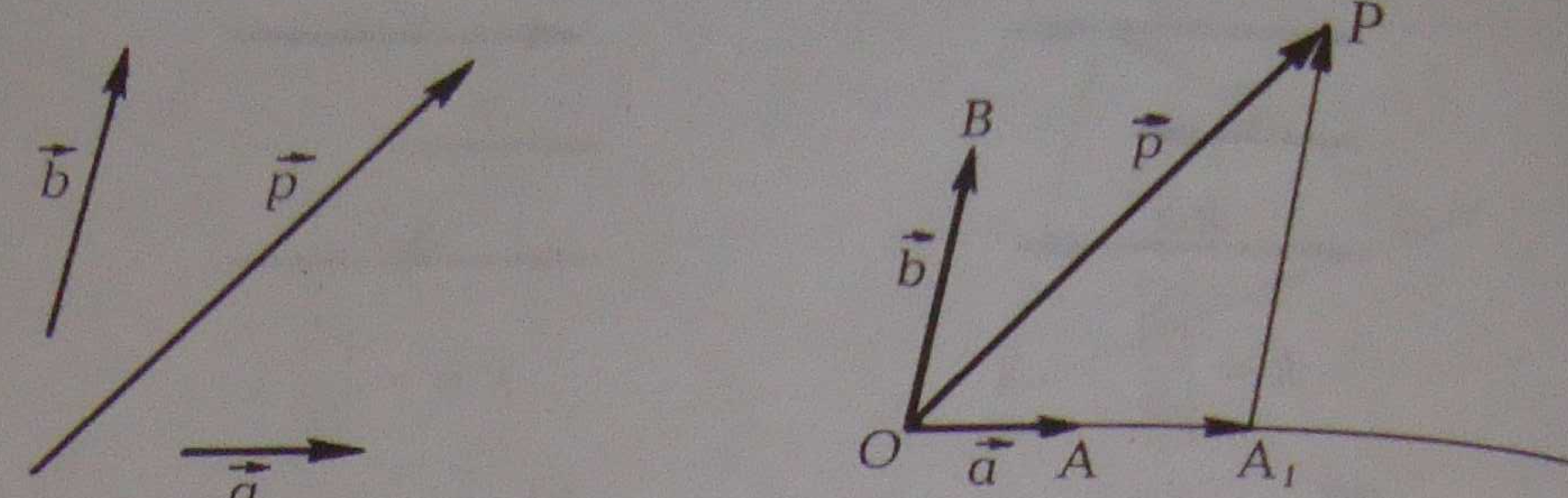
$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{b}| = |\vec{b}|$: Ուրեմն՝ $\vec{b} = k\vec{a}$: Լեմմը ապացուցված է:

Այժմ, օգտվելով այս լեմմից, ապացուցենք թեորեմ՝ վեկտորն ըստ երկու տարագիծ վեկտորների վերածելու մասին:

Թեորեմ: *Ցանկացած վեկտոր կարելի է վերածել ըստ տրված երկու տարագիծ վեկտորների, ընդ որում՝ վերածման գործակիցները որոշվում են միակ կերպով:*

Ապացուցում: Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն տրված տարագիծ վեկտորներն են: Նախ ապացուցենք, որ ցանկացած $\vec{p}$ վեկտոր կարելի է վերածել ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների: Հնարավոր են երկու դեպք:

1) $\vec{p}$ վեկտորը համագիծ է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներից մեկին, օրինակ՝ $\vec{b}$ վեկտորին: Այս դեպքում, ըստ լեմմի, $\vec{p}$ վեկտորը կարելի է ներկայացնել $\vec{p} = y\vec{b}$ տեսքով, որտեղ y-ը ինչ որ թիվ է: Հետևաբար՝



Նկ. 89

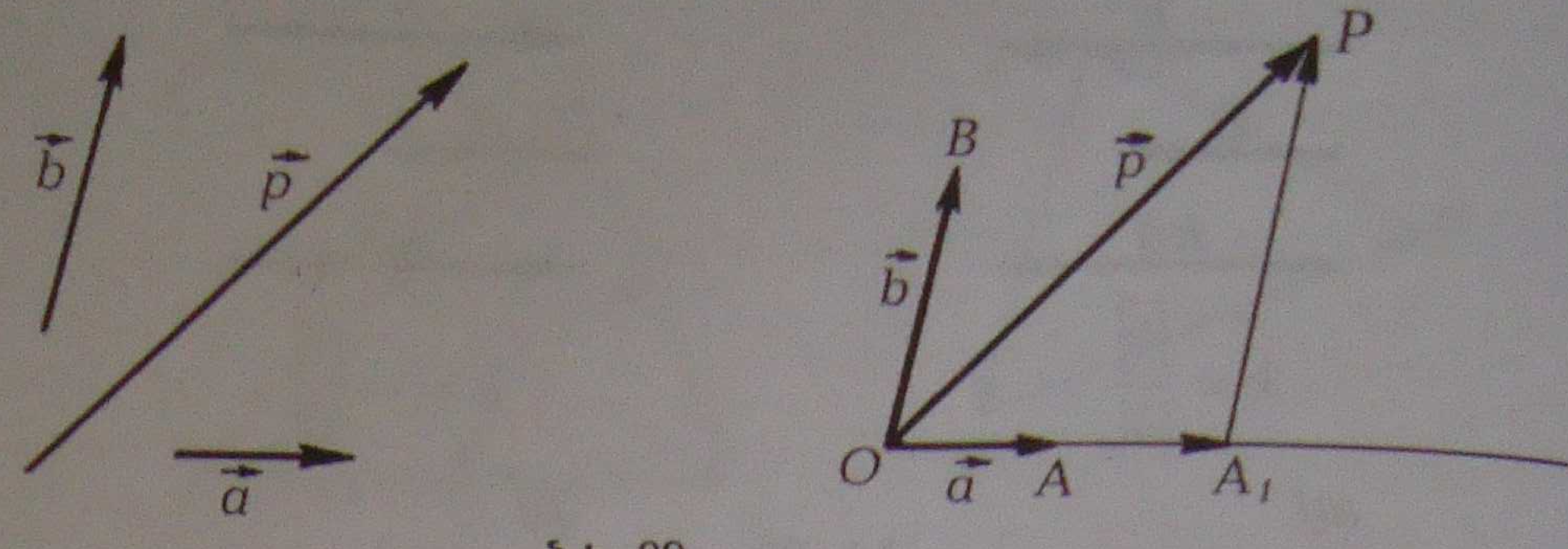
$\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, այսինքն՝ $\vec{p}$ վեկտորը վերածվում է ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների:

2) $\vec{p}$ վեկտորը համագիծ չէ ինչպես $\vec{a}$, այնպես էլ $\vec{b}$ վեկտորին: Նշենք որևէ O կետ և այդ կետից տեղադրենք $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ և $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ վեկտորները (նկ. 89): P կետով տանենք OB ուղղին զուգահեռ ուղիղ և A_1 տառով նշանակենք այդ ուղղի և OA ուղղի հատման կետը: Ըստ եռանկյան կանոնի՝ $\vec{p} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1P}$: Սակայն, $\overrightarrow{OA_1}$ և $\overrightarrow{A_1P}$ վեկտորները համագիծ են, համապատասխանաբար, $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին: Ուստի գոյություն ունեն այնպիսի x և y թվեր, որ $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{a}$ և $\overrightarrow{A_1P} = y\vec{b}$: Հետևաբար՝ $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, այսինքն $\vec{p}$ վեկտորը վերածվում է ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների:

Այժմ ապացուցենք, որ վերածման գործակիցներ x-ը և y-ը որոշվում են միակ կերպով: Ենթադրենք, թե $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ վերածման հետ մեկտեղ առկա է նաև մի վերածում՝ $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$: Երկրորդ հավասարությունից հանելով առաջինը և կիրառելով վեկտորների հետ գործողությունների հատկությունները՝ ստանում ենք. $\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b}$: Այս հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, երբ $x - x_1$ և $y - y_1$ գործակիցներից յուրաքանչյուրը զրո է: Իսկապես, եթե ընդունենք, որ, ասենք $x - x_1 \neq 0$, ապա ստացված հավասարությունից կորոշվի

$$\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1} \cdot \vec{b},$$

ինչը կնշանակեր, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են. դա կհակասեր թեորեմի պայմանին: Այսպիսով՝ $x - x_1 = 0$ և $y - y_1 = 0$, որտեղից՝ $x = x_1$ և $y = y_1$: Իսկ սա նշանակում է, որ $\vec{p}$ վեկտորի վերածման գործակիցները որոշվում են միակ կերպով: Թեորեմն ապացուցված է:



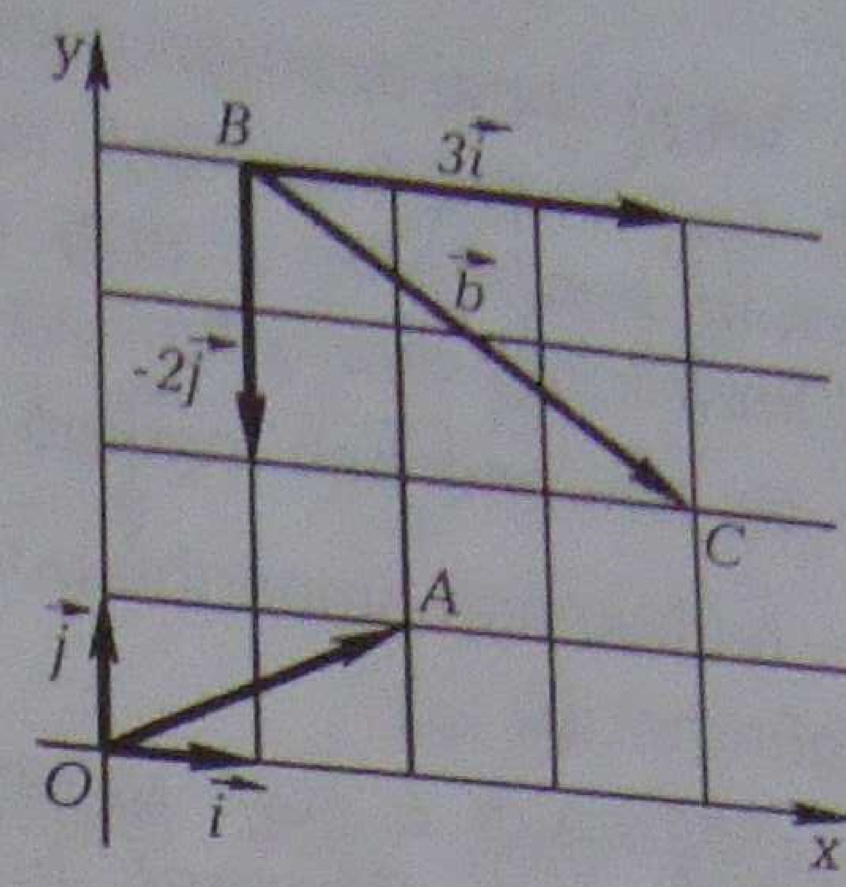
Նկ. 89

$\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, այսինքն՝ $\vec{p}$ վեկտորը վերածվում է ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների:

2) $\vec{p}$ վեկտորը համագիծ չէ ինչպես $\vec{a}$, այնպես էլ $\vec{b}$ վեկտորին: Նշենք որևէ O կետ և այդ կետից տեղադրենք $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ և $\vec{OP} = \vec{p}$ վեկտորները (նկ. 89): P կետով տանենք OB ուղղին զուգահեռ ուղիղ և A_1 տառով նշանակենք այդ ուղղի և OA ուղղի հատման կետը: Ըստ եռանկյան կանոնի՝ $\vec{p} = \vec{OA_1} + \vec{A_1P}$: Սակայն, $\vec{OA_1}$ և $\vec{A_1P}$ վեկտորները համագիծ են, համապատասխանաբար, $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին: Ուստի գոյություն ունեն այնպիսի x և y թվեր, որ $\vec{OA_1} = x\vec{a}$ և $\vec{A_1P} = y\vec{b}$: Հետևաբար՝ $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, այսինքն $\vec{p}$ վեկտորը վերածվում է ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների:

Այժմ ապացուցենք, որ վերածման գործակիցներ x-ը և y-ը որոշվում են միակ կերպով: Ենթադրենք, թե $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ վերածման հետ մեկտեղ առկա է ևս մի վերածում՝ $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$: Երկրորդ հավասարությունից հանելով առաջինը և կիրառելով վեկտորների հետ գործողությունների հատկությունները՝ ստանում ենք. $\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b}$: Այս հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, երբ $x - x_1$ և $y - y_1$ գործակիցներից յուրաքանչյուրը զրո է: Իսկապես, եթե ընդունենք, որ, ասենք՝ $x - x_1 \neq 0$, ապա ստացված հավասարությունից կորոշվի $\vec{a} = -\dfrac{y - y_1}{x - x_1} \cdot \vec{b}$, ինչը կնշանակեր, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են. դա կհակասեր թեորեմի պայմանին: Այսպիսով՝ $x - x_1 = 0$ և $y - y_1 = 0$, որտեղից՝ $x = x_1$ և $y = y_1$: Իսկ սա նշանակում է, որ $\vec{p}$ վեկտորի վերածման գործակիցները որոշվում են միակ կերպով: Թեորեմն ապացուցված է:

48 Վեկտորի կոորդինատները: Վեկտորը, որի երկարությունը հավասար է հատվածների չափման միավորին, կանվանենք *միավոր վեկտոր:* Կոորդինատների O սկզբնակետից տեղադրենք երկու $\vec{i}$ և $\vec{j}$ միավոր վեկտորներ այնպես, որ $\vec{i}$ վեկտորի ուղղությունը համընկնի կոորդինատային Ox առանցքի ուղղությանը, իսկ $\vec{j}$ վեկտորի ուղղությունը Oy առանցքի ուղղությանը (նկ. 90): $\vec{i}$ և $\vec{j}$ վեկտորներն անվանենք *կոորդինատային վեկտորներ:*



Նկ. 90

Կոորդինատային վեկտորները տարագիծ են և, ուրեմն, ցանկացած $\vec{p}$ վեկտոր կարելի է վերածել ըստ կոորդինատային վեկտորների, այսինքն՝ ներկայացնել $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$ տեսքով: Նշենք, որ վերածման գործակիցները, այն է՝ x և y թվերը, որոշվում են միակ կերպով: $\vec{p}$ վեկտորի՝ ըստ կոորդինատային վեկտորների վերածման գործակիցները կոչվում են $\vec{p}$ *վեկտորի կոորդինատներ*՝ տրված կոորդինատային համակարգում: Վեկտորի կոորդինատները գրառում են ձևավոր փակագծերի մեջ՝ վեկտորի նշանակումից հետո. $\vec{p}\{x, y\}$:

Նկար 90-ում պատկերված են $\overrightarrow{OA}\{2,1\}$ և $\vec{b}\{3,-2\}$ վեկտորները:

Քանի որ զրոյական վեկտորը կարելի է ներկայացնել $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$ տեսքով, ուրեմն նրա կոորդինատներն են $\vec{0}\{0,0\}$: Եթե $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ և $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ վեկտորները հավասար են, ապա $x_1 = x_2$ և $y_1 = y_2$: Այսպիսով՝ *հավասար վեկտորների կոորդինատները հավասար են:*

Թվարկենք այն կանոնները, որոնք թույլ են տալիս վեկտորների կոորդինատների միջոցով հաշվել նրանց գումարը, տարբերությունը, վեկտորի ու թվի արտադրյալը:

1^0. *Երկու կամ ավելի վեկտորների գումարի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների գումարին:*

Այս պնդումն ապացուցենք երկու վեկտորի համար: Դիտարկենք $\vec{a}\{x_1, y_1\}$ և $\vec{b}\{x_2, y_2\}$ վեկտորները: Քանի որ $\vec{a} = x_1 i + y_1\vec{j}$ և $\vec{b} = x_2 i + y_2\vec{j}$, ապա օգտվելով վեկտորների հետ գործողությունների հատկությունից՝ ստանում ենք.

$\vec{a} + \vec{b} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$: Դրանից հետևում է, որ $\vec{a} + \vec{b}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$:

Նույն կերպ ապացուցվում է հետևյալ պնդումը.

2^0. *Երկու վեկտորների տարբերության յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների տարբերությանը:*

Այլ խոսքով՝ եթե տրված վեկտորներն են. $\vec{a}\{x_1, x_2\}, \vec{b}\{x_2, y_2\}$, ապա $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{x_1 - x_2, y_1 - y_2\}$ (ապացուցեք ինքնուրույն):

3^0. *Վեկտորի և թվի արտադրյալի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է վեկտորի համապատասխան կոորդինատի և այդ թվի արտադրյալին:*

Իսկապես, եթե $\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{x, y\}$, իսկ k-ն ցանկացած թիվ է, ապա՝ նկատի ունենալով, որ $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, ստացվում է. $k\vec{a} = k(x\vec{i} + y\vec{j}) = kx\vec{i} + ky\vec{j}$: Իսկ դրանից հետևում է, որ $k\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{kx, ky\}$:

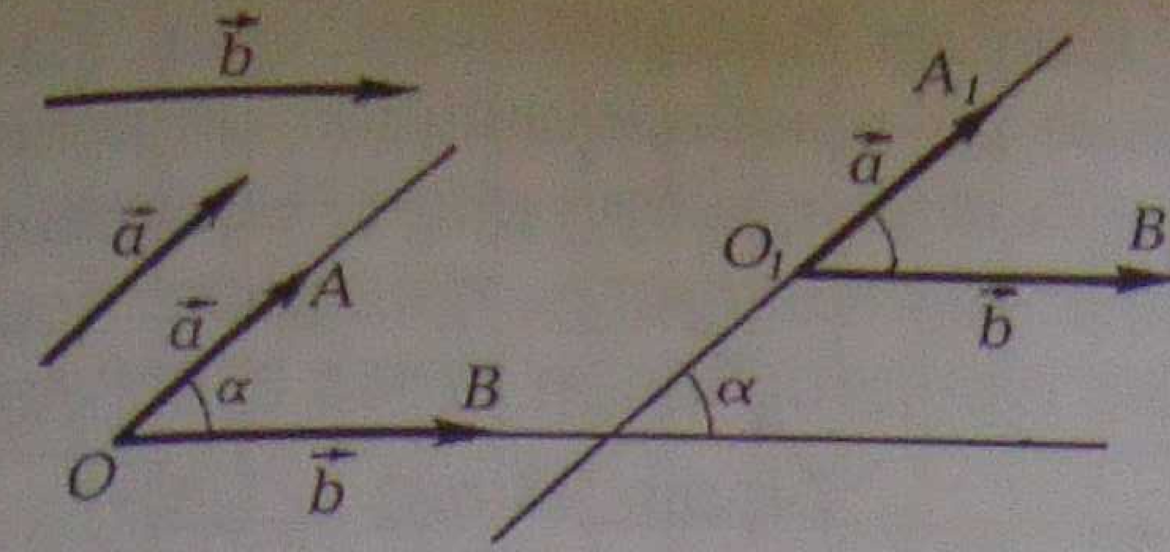
Դիտարկված կանոնները թույլ են տալիս որոշել ցանկացած վեկտորի կոորդինատները, եթե այն ներկայացված է տրված կոորդինատներով վեկտորների հանրահաշվական գումարի տեսքով:

Օրինակ. պահանջվում է որոշել $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե տրված են. $\vec{a}\{1,-2\}, \vec{b}\{0,3\}, \vec{c}\{-2,3\}$:

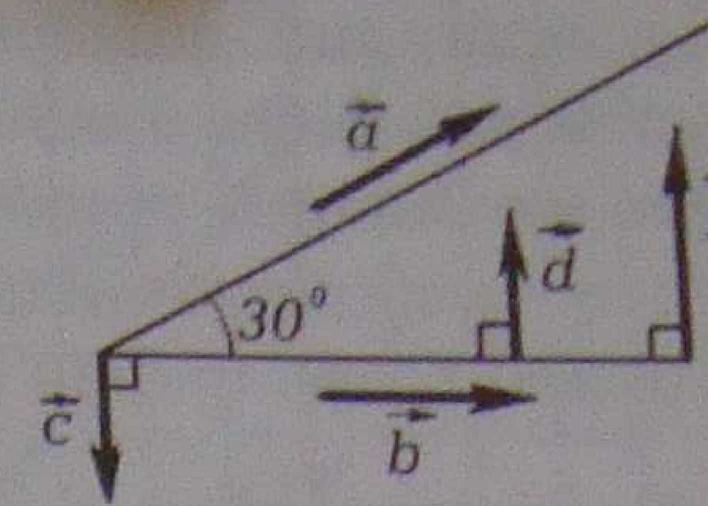
Ըստ կանոն 3^0-ի՝ $2\vec{a}$ վեկտորն ունի $\{2,-4\}$, իսկ $-\frac{1}{3}\vec{b}$ վեկտորը՝ $\{0,-1\}$ կոորդինատները: Քանի որ $\vec{p} = (2\vec{a}) + \left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right) + \vec{c}$, ապա $\vec{p}$ վեկտորի կոորդինատները կարող ենք հաշվել ըստ կանոն 1^0-ի. $\{2+0-2, -4-1+3\}$: Այսպիսով՝ $\vec{p}$ վեկտորն ունի $\{0,-2\}$ կոորդինատներ:

49 Վեկտորների կազմած անկյունը:

Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն երկու տրված վեկտորներ են: Որևէ O կետից տեղադրենք $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ և $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ վեկտորները: Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված չեն, ապա $\overrightarrow{OA}$ և $\overrightarrow{OB}$ ճառագայթները կազմում են AOB անկյուն (նկ. 91): Դրա աստիճանային չափը նշանակենք α-ով: Այդ դեպքում կասենք, *որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը հավասար է α:* Նկատենք, որ α-ն կախված չէ տվյալ O կետի ընտրությունից, որից տեղադրում ենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները (օգտվելով նկար 91-ից՝ ապացուցեք ինքնուրույն): Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները



Նկ. 91



Նկ. 92

համուղղված են, մասնավորապես՝ դրանցից մեկը կամ երկուսը զրոյական են, ապա կհամարենք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը 0^0 է: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը նշանակվում է $\angle(\vec{a},\vec{b})$:

Նկար 92-ում պատկերված վեկտորների կազմած անկյուններն են. $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 30^0$, $\angle(\vec{a},\vec{c}) = 120^0$, $\angle(\vec{b},\vec{c}) = 90^0$, $\angle(\vec{d},\vec{f}) = 0^0$, $\angle(\vec{d},\vec{c}) = 180^0$:

Երկու վեկտորներ կոչվում են *ուղղահայաց* (կամ *փոխուղղահայաց*), եթե նրանց կազմած անկյունը 90^0 է: Նկար 92-ում $\vec{b}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{d}$, $\vec{b}\perp\vec{f}$:

50* Վեկտորների սկալյար արտադրյալը:

Մենք արդեն գիտենք գումարել վեկտորները և վեկտորը բազմապատկել թվով: Այժմ ներմուծենք վեկտորների հետ կատարվող մի նոր գործողություն՝ վեկտորների սկալյար բազմապատկումը:

Երկու վեկտորի սկալյար արտադրյալ կոչվում է նրանց երկարությունների և իրենցով կազմված անկյան կոսինուսի արտադրյալը:

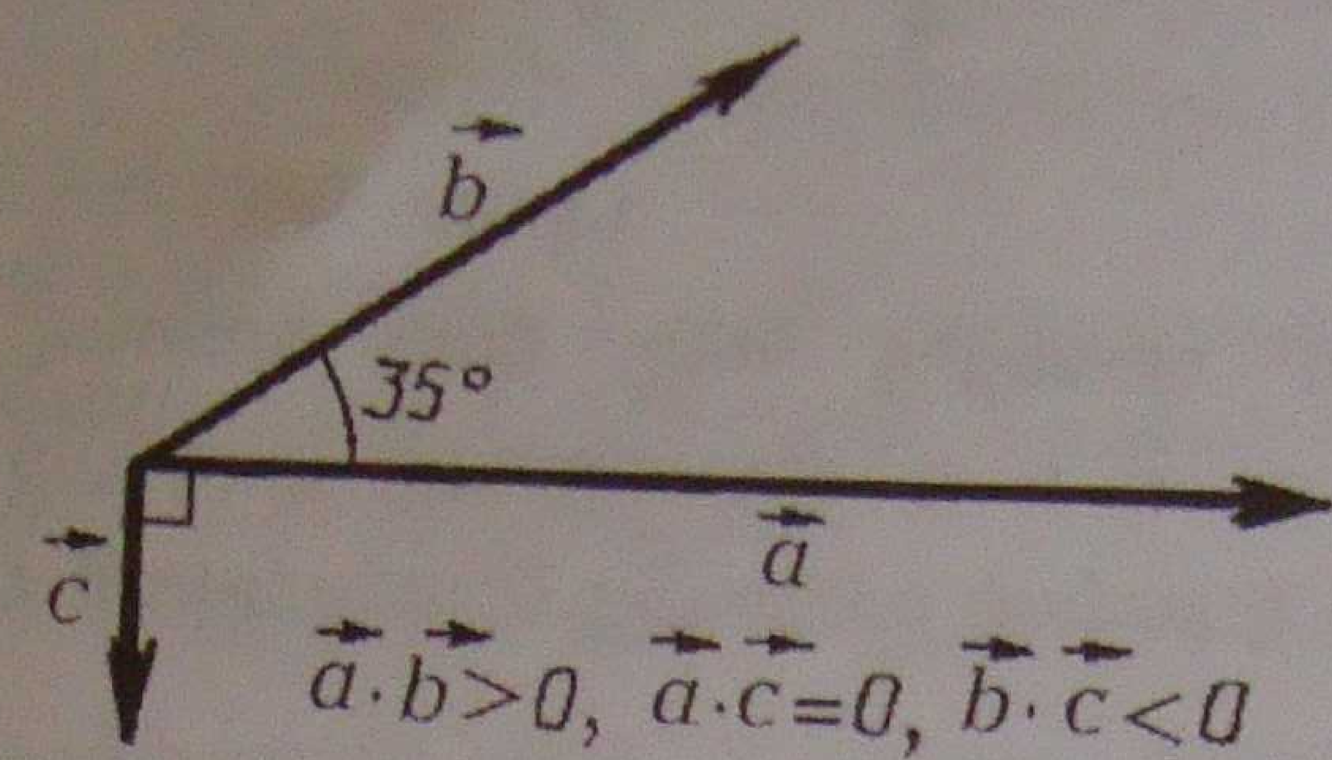
$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը նշանակվում է $\vec{a}\cdot\vec{b}$ կամ $\vec{a}\vec{b}$: Ըստ սահմանման՝

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}): \qquad (1)$$

Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներն ուղղահայաց են, այսինքն՝ $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90^0$, ապա $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = 0$ և, ուրեմն, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$: Հակադարձը՝ եթե $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ և $\vec{a}$-ն ու $\vec{b}$-ն ոչ զրոյական վեկտոր են, ապա (1) հավասարությունից ստացվում է, որ $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = 0$: Ուրեմն՝ $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90^0$, այսինքն՝ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն ուղղահայաց են:

Այսպիսով՝ *երկու՝ ոչ զրոյական վեկտորների սկալյար արտադրյալը 0 է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ վեկտորներն ուղղահայաց են:*

Ուշադրություն դարձրեք մի կարևոր հանգամանքի վրա: (1) հավասարության ձախ մասում գրված են բազմապատկվող վեկտորներ, մինչդեռ աջ մասում՝ բազմապատկման արդյունքը թիվ է: Նկատենք, որ երկու՝ ոչ զրոյական վեկտորների արտադրյալը դրական (բացասական) թիվ է, եթե նրանց կազմած անկյունը փոքր է (մեծ է) 90^0-ից:



Նկ. 93

Նկար 93-ում $\angle(\vec{a},\vec{b})=35^0$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=90^0$, $\angle(\vec{b},\vec{c})=125^0$: Ուրեմն՝ $\vec{a}\vec{b}>0$, $\vec{a}\vec{c}=0$, $\vec{b}\vec{c}<0$:

Վեկտորների սկալյար արտադրյալն օժտված է մի շարք հատկություններով, որոնք դուք կուսումնասիրեք հաջորդ դասարաններում:

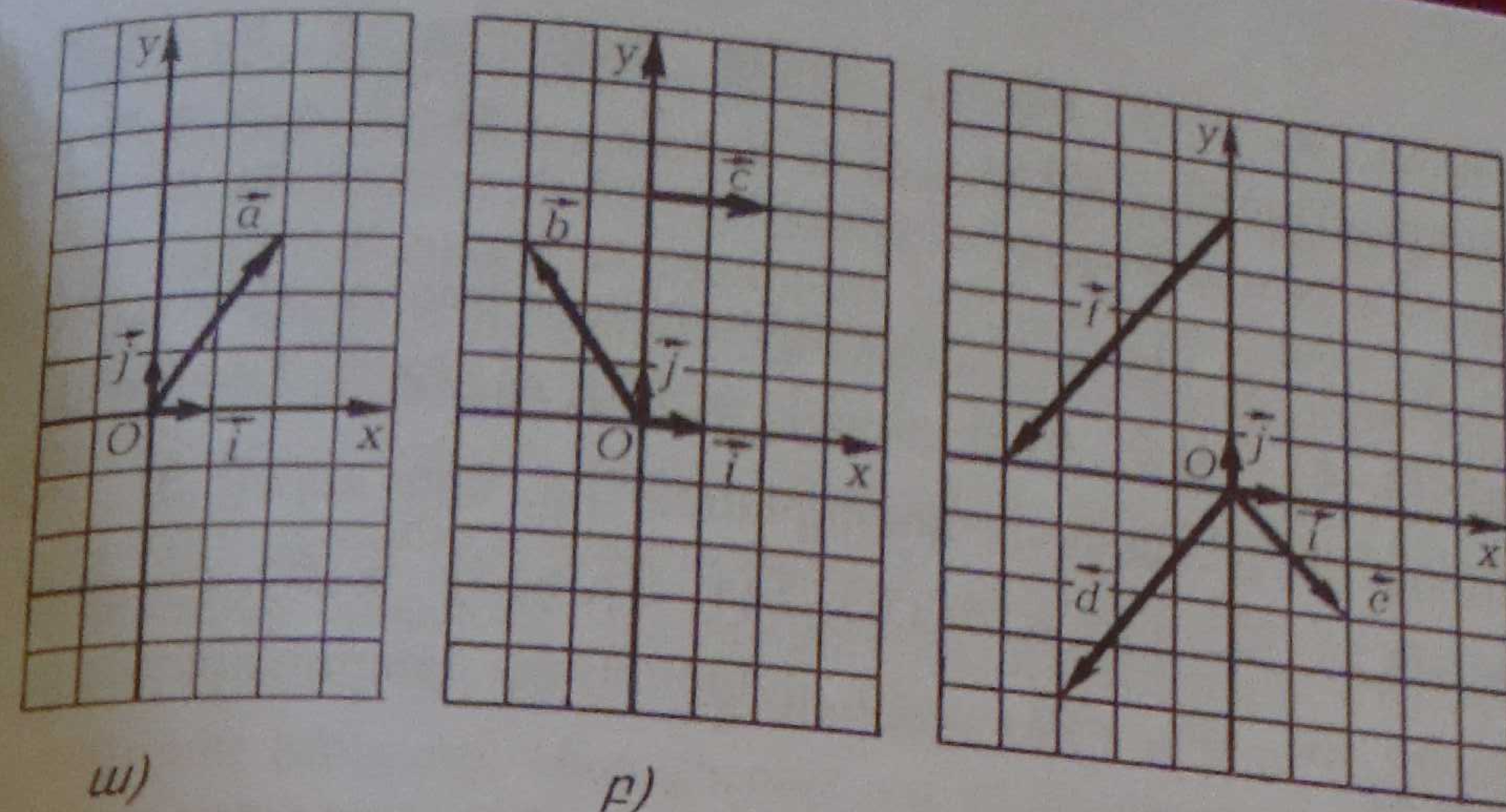
Խնդիրներ

348. Գտեք այնպիսի k թիվ, որ տեղի ունենա $\vec{n}=k\vec{m}$ հավասարությունը, եթե հայտնի է, որ **ա)** $\vec{m}$ և $\vec{n}$ վեկտորները հակուղղված են և $|\vec{m}|$=0,5սմ, $|\vec{n}|$=2սմ, **բ)** $\vec{m}$ և $\vec{n}$ վեկտորները համուղղված են և $|\vec{m}|$=12սմ, $|\vec{n}|$=4դմ, **գ)** $\vec{m}$ և $\vec{n}$ վեկտորները հակուղղված են և $|\vec{m}|$=400մմ, $|\vec{n}|$=4դմ, **դ)** $\vec{m}$ և $\vec{n}$ վեկտորները համուղղված են և $|\vec{m}|=\sqrt{2}$ սմ, $|\vec{n}|=\sqrt{50}$ սմ:

349. $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում, իսկ M-ը AO հատվածի միջնակետն է: Գտեք, եթե հնարավոր է, այնպիսի k թիվ, որ տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը. **ա)** $\vec{AC}=k\vec{AO}$, **բ)** $\vec{BO}=k\vec{BD}$, **գ)** $\vec{OC}=k\vec{CA}$, **դ)** $\vec{AB}=k\vec{DC}$, **ե)** $\vec{BC}=k\vec{DA}$, **զ)** $\vec{AM}=k\vec{CA}$, **է)** $\vec{MC}=k\vec{AM}$, **ը)** $\vec{AC}=k\vec{CM}$, **թ)** $\vec{AB}=k\vec{BC}$, **ժ)** $\vec{AO}=k\vec{BD}$:

350. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են: Արդյոք համագի՞ծ են.ա) $\vec{a}+3\vec{b}$ և $\vec{a}$ վեկտորները, բ) $\vec{b}-2\vec{a}$ և $\vec{a}$ վեկտորները: Պատասխանը հիմնավորեք:

351. Ապացուցեք, որ եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են, ապա տարագիծ են նաև. **ա)** $\vec{a}+\vec{b}$ և $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորները, **բ)** $2\vec{a}-\vec{b}$ և $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորները, **գ)** $\vec{a}+\vec{b}$ և $\vec{a}+3\vec{b}$ վեկտորները:



ա) բ) գ)

Նկ. 94

352. M կետը գտնվում է $ABCD$ զուգահեռագծի AC անկյունագծի վրա, ընդ որում՝ $AM:MC=4:1$: $\vec{AM}$ վեկտորը վերածեք ըստ $\vec{a} = \vec{AB}$ և $\vec{b} = \vec{AD}$ վեկտորների:

353. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են: Գտեք այնպիսի x և y թվեր, որոնք բավարարում են հետևյալ հավասարությանը.

ա) $3\vec{a} - x\vec{b} = y\vec{a} + \vec{b}$, **բ)** $4\vec{a} - x\vec{a} + 5\vec{b} + y\vec{b} = \vec{0}$,

գ) $x\vec{a} + 3\vec{b} - y\vec{b} = \vec{0}$, **դ)** $\vec{a} + \vec{b} - 3y\vec{a} + x\vec{b} = \vec{0}$:

354. Գծեք կոորդինատների Oxy ուղղանկյուն համակարգը և $\vec{i}$, $\vec{j}$ կոորդինատային վեկտորները: Կառուցեք O սկզբնակետով վեկտորներ, որոնք տրված են հետևյալ կոորդինատներով. $\vec{a}\{3,0\}$, $\vec{b}\{2,-1\}$, $\vec{c}\{0,-3\}$, $\vec{d}\{1,1\}$, $\vec{e}\{2,\sqrt{2}\}$:

355. 94,ա,բ,գ նկարներում պատկերված $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ վեկտորները վերածեք ըստ $\vec{i}$ և $\vec{j}$ կոորդինատային վեկտորների և գտեք դրանց կոորդինատները:

356. Որոշեք $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{c} = 8\vec{i}$, $\vec{d} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{e} = -2\vec{j}$, $\vec{f} = -\vec{i}$ վեկտորներից յուրաքանչյուրի կոորդինատները:

357. Գրառեք հետևյալ վեկտորների վերածումը՝ ըստ $\vec{i}$ և $\vec{j}$ կոորդինատային վեկտորների. **ա)** $\vec{x}\left\{-3, \frac{1}{5}\right\}$, **բ)** $\vec{y}\{-2,-3\}$, **գ)** $\vec{z}\{-1,0\}$, **դ)** $\vec{u}\{0,3\}$, **ե)** $\vec{v}\{0,1\}$:

358. Գտեք x և y թվերը, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին. **ա)** $x\vec{i} + y\vec{j} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$, **բ)** $-3\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + 7\vec{j}$, **գ)** $x\vec{i} + y\vec{j} = -4\vec{i}$, **դ)** $x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{0}$:

359. Գտեք $\vec{a} + \vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե **ա)** $\vec{a}\{3,2\}$, $\vec{b}\{2,5\}$, **բ)** $\vec{a}\{3,-4\}$, $\vec{b}\{1,5\}$, **գ)** $\vec{a}\{-4,-2\}$, $\vec{b}\{5,3\}$, **դ)** $\vec{a}\{2,7\}$, $\vec{b}\{-3,-7\}$:

360. Գտեք $\vec{a} - \vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե. **ա)** $\vec{a}\{5,3\}$, $\vec{b}\{2,1\}$, **բ)** $\vec{a}\{3,2\}$, $\vec{b}\{-3,2\}$, **գ)** $\vec{a}\{3,6\}$, $\vec{b}\{4,-3\}$, **դ)** $\vec{a}\{-5,-6\}$, $\vec{b}\{2,-4\}$:

361. Գտեք $2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-3\vec{a}$ վեկտորների կոորդինատները, եթե $\vec{a}\{3,2\}$:

362. Տրված են $\vec{a}\{2,4\}$, $\vec{b}\{-2,0\}$, $\vec{c}\{0,0\}$, $\vec{d}\{-2,-3\}$, $\vec{e}\{2,-3\}$, $\vec{f}\{0,5\}$ վեկտորները: Գտեք այդ վեկտորներից յուրաքանչյուրի հակադիր վեկտորի կոորդինատները:

363. $ABCD$ քառակուսու անկյունագծերը հատվում են O կետում: Գտեք հետևյալ վեկտորների կազմած անկյունը. **ա)** $\vec{AB}$ և $\vec{AC}$, **բ)** $\vec{AB}$ և $\vec{DA}$, **գ)** $\vec{OA}$ և $\vec{OB}$, **դ)** $\vec{AO}$ և $\vec{OB}$, **ե)** $\vec{AC}$ և $\vec{BD}$, **զ)** $\vec{AD}$ և $\vec{DB}$, **է)** $\vec{AO}$ և $\vec{OC}$:

364. $ABCD$ շեղանկյան անկյունագծերը հատվում են O կետում, և BD անկյունագիծը հավասար է շեղանկյան կողմին: Գտեք հետևյալ վեկտորների կազմած անկյունը. **ա)** $\vec{AB}$ և $\vec{AD}$, **բ)** $\vec{AB}$ և $\vec{DA}$, **գ)** $\vec{BA}$ և $\vec{AD}$, **դ)** $\vec{OC}$ և $\vec{OD}$, **ե)** $\vec{AB}$ և $\vec{DC}$, **զ)** $\vec{AB}$ և $\vec{CD}$:

365. Գտեք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, իսկ նրանց կազմած անկյունը հավասար է. **ա)** 45^0, **բ)** 90^0, **գ)** 135^0:

366. Տարված է a կողմով ABC հավասարակողմ եռանկյան BD բարձրությունը: Գտեք հետևյալ վեկտորների սկալյար արտադրյալը. **ա)** $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$, **բ)** $\vec{AC}\cdot\vec{CB}$, **գ)** $\vec{AC}\cdot\vec{BD}$, **դ)** $\vec{AC}\cdot\vec{AC}$:

367*. Տրված են $ABCD$ ուղղանկյան կից կողմերը՝ AB=1սմ և $AD=\sqrt{3}$ սմ: Տարված են ուղղանկյան անկյունագծերը, որոնք հատվում են O կետում: Գտեք վեկտորների սկալյար արտադրյալները. **ա)** $\vec{OA}\cdot\vec{OB}$, **բ)** $\vec{OA}\cdot\vec{OD}$, **գ)** $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$, **դ)** $\vec{AD}\cdot\vec{AC}$:

Գլուխ XIII-ի կրկնության հարցեր

1. Բերեք վեկտորական մեծությունների օրինակներ:
2. Սահմանեք վեկտորը: Բացատրեք, թե ինչ է զրոյական վեկտորը:
3. Ի՞նչն է կոչվում ոչ զրոյական վեկտորի երկարություն: Որքա՞ն է զրոյական վեկտորի երկարությունը:
4. Ո՞ր վեկտորներն են կոչվում համագիծ: Պատկերեք համուղղված $\vec{a}$, $\vec{b}$ վեկտորներ և հակուղղված $\vec{c}$, $\vec{d}$ վեկտորներ:
5. Սահմանեք հավասար վեկտորների հասկացությունը:
6. Պարզաբանեք «$\vec{a}$ վեկտորը տեղադրված է A կետից» արտահայտության իմաստը: Ապացուցեք, որ ցանկացած կետից կարելի է տեղադրել տրվածին հավասար վեկտոր, ընդ որում՝ միակը:
7. Պարզաբանեք, թե որ վեկտորն է կոչվում երկու տրված վեկտորների գումար: Ո՞րն է երկու վեկտորների գումարման եռանկյան կանոնը:
8. Ապացուցեք, որ ցանկացած $\vec{a}$ վեկտորի համար $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$:
9. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեմ՝ վեկտորների գումարման օրենքների մասին:
10. Ո՞րն է երկու տարագիծ վեկտորների գումարման զուգահեռագծի կանոնը:
11. Ո՞րն է մի քանի վեկտորների գումարման բազմանկյան կանոնը:
12. Ո՞ր վեկտորն է կոչվում երկու վեկտորների տարբերություն: Կառուցեք երկու տրված վեկտորների տարբերությունը:
13. Ո՞ր վեկտորն է կոչվում տրվածին հակադիր վեկտոր: Ձևակերպեք և ապացուցեք վեկտորների տարբերության մասին թեորեմը:
14. Ո՞ր վեկտորն է կոչվում տրված վեկտորի և թվի արտադրյալ:
15. Ինչի՞ է հավասար $k\vec{a}$ արտադրյալը, եթե. ա) $\vec{a}=\vec{0}$, բ) $k=0$:
16. Կարո՞ղ են, արդյոք, տարագիծ լինել $\vec{a}$ և $k\vec{a}$ վեկտորները:
17. Ձևակերպեք վեկտորը թվով բազմապատկման հիմնական հատկությունները:
18. Ձևակերպեք և ապացուցեք համագիծ վեկտորների մասին լեմմը:
19. Ի՞նչ է նշանակում վերածել վեկտորը՝ ըստ երկու տրված վեկտորների:
20. Ձևակերպեք և ապացուցեք թեորեմ՝ վեկտորն ըստ երկու վեկտորների վերածելու մասին:
21. Որո՞նք են կոորդինատային վեկտորները:
22. Ձևակերպեք պնդում ցանկացած վեկտորը ըստ կոորդինատային վեկտորների վերածելու մասին:
23. Պարզաբանեք, թե ինչ է նշանակում «$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը հավասար է α» նախադասությունը: Վեկտորների կազմած անկյունը ո՞ր դեպքում է համարվում 0^0:

24. Ո՞ր երկու վեկտորներն են կոչվում ուղղահայաց:

25. Ի՞նչ է երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը: Ո՞ր դեպքում երկու՝ ոչ զրոյական վեկտորների սկալյար արտադրյալը. **ա)**հավասար է 0, **բ)**մեծ է 0-ից, **գ)**փոքր է 0-ից:

Լրացուցիչ խնդիրներ

368. Ապացուցեք, որ եթե $\vec{m}$ և $\vec{n}$ վեկտորները համուղղված են, ապա $|\vec{m}+\vec{n}|=|\vec{m}|+|\vec{n}|$, իսկ եթե $\vec{m}$-ը և $\vec{n}$-ը հակուղղված են, ընդ որում $|\vec{m}|\geq|\vec{n}|$, ապա $|\vec{m}+\vec{n}|=|\vec{m}|-|\vec{n}|$:

369. Ապացուցեք, որ ցանկացած $\vec{x}$ և $\vec{y}$ վեկտորների համար տեղի ունեն $|\vec{x}|-|\vec{y}|\leq|\vec{x}+\vec{y}|\leq|\vec{x}|+|\vec{y}|$ անհավասարությունները:

370. ABC եռանկյան BC կողմի վրա նշված է N կետն այնպես, որ $BN=2NC$: $\vec{AN}$ վեկտորն արտահայտեք $\vec{a}=\vec{BA}$ և $\vec{b}=\vec{BC}$ վեկտորներով:

371. MNP եռանկյան MN և NP կողմերի վրա նշված են, համապատասխանաբար, X և Y կետեր այնպես, որ $MX:XN=3:2$ և $NY:YP=3:2$: $\vec{XY}$ և $\vec{MP}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{a}=\vec{NM}$ և $\vec{b}=\vec{NP}$ վեկտորներով:

372. $ABCD$ սեղանի AD հիմքը երեք անգամ մեծ է BC հիմքից: AD կողմի վրա նշված է այնպիսի K կետ, որ $AK=\frac{1}{3}AD$: $\vec{CK}$, $\vec{KD}$ և $\vec{BC}$ վեկտորներն արտահայտեք $\vec{a}=\vec{BA}$ և $\vec{b}=\vec{CD}$ վեկտորներով:

373. A, B և C կետերը դասավորված են այնպես, որ $\vec{BC}=\frac{1}{2}\vec{AB}$: Ապացուցեք, որ ցանկացած O կետի համար տեղի ունի $\vec{OB}=\frac{1}{3}\vec{OA}+\frac{2}{3}\vec{OC}$ հավասարությունը:

374. C կետը տրոհում է AB հատվածը $m:n$ հարաբերությամբ՝ հաշված A կետից: Ապացուցեք, որ ցանկացած O կետի համար տեղի ունի $\vec{OC}=\frac{n}{m+n}\vec{OA}+\frac{m}{m+n}\vec{OB}$ հավասարությունը:

375. Դիցուք՝ AA_1-ը, BB_1-ը և CC_1-ը ABC եռանկյան միջնագծերն են, իսկ O-ն կամայական կետ է: Ապացուցեք, որ

$$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{OA_1}+\vec{OB_1}+\vec{OC_1}:$$

376*. A-ն և C-ն կամայական քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերն են, իսկ B-ն և D-ն նրա մյուս երկու կողմերի միջնակետերը: Ապացուցեք, որ ցանկացած O կետի համար տեղի ունի $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{OD}$ հավասարությունը:

377. Ուղղանկյուն սեղանի անկյուններից մեկը 120^0 է: Գտեք նրա միջին գիծը, եթե սեղանի փոքր անկյունագիծը և մեծ սրունքը հավասար են a:

378. Ապացուցեք, որ սեղանի սրունքին առընթեր երկու անկյան կիսորդների հատման կետն ընկած է սեղանի միջին գիծն ընդգրկող ուղղի վրա:

379. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են: Գտեք այնպիսի x թիվ (եթե հնարավոր է), որ $\vec{p}$ և $\vec{q}$ վեկտորները լինեն համագիծ, եթե.

ա) $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+x\vec{b}$, **բ)** $\vec{p}=x\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+x\vec{b}$,

գ) $\vec{p}=\vec{a}+x\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}$, **դ)** $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=x\vec{a}+\vec{b}$:

380. Գտեք $\vec{p}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե.

ա) $\vec{p}=7\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{a}\{1,1\}$, $\vec{b}\{5,-2\}$,

բ) $\vec{p}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{a}\{6,3\}$, $\vec{b}\{5,4\}$,

գ) $\vec{p}=5\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{a}\left\{\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right\}$, $\vec{b}\{6,-1\}$,

դ) $\vec{p}=3\left(-2\vec{a}-4\vec{b}\right)$, $\vec{a}\{1,5\}$, $\vec{b}\{-1,-1\}$:

Նմանության կիրառություններ: Մակերեսներ:

381. ABC եռանկյան AC և BC կողմերի վրա վերցված են, համապատասխանաբար, M և K կետերը: AK և BM հատվածները հատվում են O կետում: Գտեք CMK եռանկյան մակերեսը, եթե OMA, OAB և OBK եռանկյունների մակերեսները համապատասխանաբար հավասար են S_1, S_2, S_3:

382. ABC եռանկյան AC և BC կողմերի վրա M և K կետերը, իսկ MK հատվածի վրա P կետը վերցված են այնպես, որ $\frac{AM}{MC}=\frac{CK}{KB}=\frac{MP}{PK}$: Գտեք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե AMP և BKP եռանկյունների մակերեսներն են S_1-ը և S_2-ը:

383. BC և AD հիմքերով $ABCD$ սեղանի անկյունագծերը հատվում են O կետում: BOC և AOD եռանկյունների մակերեսներն են S_1-ը և S_2-ը: Գտեք սեղանի մակերեսը:

384. Սեղանի հիմքերն են a-ն և b-ն: Հիմքերին զուգահեռ հատվածը, որի ծայրակետերը գտնվում են սրունքների վրա, սեղանի մակերեսը բաժանում է երկու հավասար մասերի: Գտեք այդ հատվածը:

385. $ABCD$ քառանկյան AC և BD անկյունագծերի միջնակետերով անցնող ուղիղը M և K կետերում հատում է AB և CD կողմերը: Ապացուցեք, որ DCM և AKB եռանկյունների մակերեսները հավասար են:

386. Երկու չհատվող հատվածները ուռուցիկ քառանկյան երկու հանդիպակաց կողմերից յուրաքանչյուրը բաժանում են երեք հավասար մասերի: Ապացուցեք, որ քառանկյան այն մասի մակերեսը, որն ընդգրկված է այդ հատվածների միջև, երեք անգամ փոքր է ամբողջ քառանկյան մակերեսից:

387. A կետն ընկած է 60^0-ի անկյան ներսում: A կետից մինչև անկյան կողմերը եղած հեռավորություններն են a և b: Գտեք A կետի հեռավորությունը անկյան գագաթից:

388. $ABCD$ զուգահեռագծի C գագաթով անցնող ուղիղը AB և AD ուղիղները հատում է K և M կետերում: Գտեք այդ զուգահեռագծի մակերեսը, եթե KBC և CDM եռանկյունների մակերեսներն են S_1-ը և S_2-ը:

389. $ABCD$ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետով տարված է ուղիղ, որը հատում է AB հատվածը M կետում, իսկ CD հատվածը՝ K կետում: K կետով տարված՝ AB-ին զուգահեռ ուղիղը

BD-ն հատում է T կետում, իսկ M կետով տարված CD-ին զուգահեռ ուղիղը AC-ն հատում է E կետում: Ապացուցեք, որ BE և CT ուղիղները զուգահեռ են:

390. ABC եռանկյան ($AB \neq AC$) BC կողմի M միջնակետով տարված է A անկյան կիսորդին զուգահեռ ուղիղ, որը AB և AC ուղիղները հատում է, համապատասխանաբար, D և E կետերում: Ապացուցեք, որ $BD=CE$:

391. Ապացուցեք, որ սուրանկյուն եռանկյան բարձրությունների հիմքերը միացնող հատվածներով առաջանում է մի եռանկյուն, որի կիսորդները գտնվում են այդ բարձրությունների վրա:

392. ABC եռանկյան AB կողմի վրա վերցված են E և F կետերն այնպես, որ E կետը գտնվում է AF հատվածի վրա, և $AE=BF$: E կետով տարված է AC կողմին զուգահեռ ուղիղ, իսկ F կետով՝ BC կողմին զուգահեռ ուղիղ, ընդ որում՝ այդ երկու ուղիղները հատվում են K կետում: Ապացուցեք, որ K կետը գտնվում է ABC եռանկյան AB կողմին տարված միջնագծի վրա:

393. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = \dfrac{180^0}{7}$ և $\angle B = \dfrac{360^0}{7}$: Ապացուցեք, որ

$$\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}:$$

394. ABC հավասարասրուն եռանկյան AC հիմքի D միջնակետից տարված է BC կողմին ուղղահայաց՝ DH-ը: Դիցուք՝ M-ը DH հատվածի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ $BM \perp AH$:

395. ABC ուղղանկյուն եռանկյան C ուղիղ անկյան գագաթից տարված է ներքնաձիգին ուղղահայաց՝ CD-ն, իսկ D կետից տարված են AC և BC էջերին ուղղահայացներ՝ DE-ն և DF-ը: Ապացուցեք, որ. **ա)** $CD^3=AB \cdot AE \cdot BF$, **բ)** $AE^2+BF^2+3CD^2=AB^2$, **գ)** $\sqrt[3]{AE^2} + \sqrt[3]{BF^2} = \sqrt[3]{AB^2}$:

396. M կետը չի գտնվում $ABCD$ զուգահեռագծի կողմերն ընդգրկող ուղիղների վրա: Ապացուցեք, որ գոյություն ունեն N, P և Q կետեր՝ դասավորված այնպես, որ A-ն, B-ն, C-ն և D-ն համապատասխանաբար MN, NP, PQ և QM հատվածների միջնակետերն են:

397. $ABCD$ սեղանի անկյունագծերը հատվում են O կետում: ABO եռանկյունը, որի AB կողմը սեղանի փոքր հիմքն է, հավասարակողմ է: Ապացուցեք, որ այն եռանկյունը, որի գագաթները OA, OD և BC հատվածների միջնակետերն են, նույնպես հավասարակողմ է:

398. ABC եռանկյան A գագաթից տարված են AM և AK ուղղահայացները այդ եռանկյան B և C գագաթներին հարակից արտաքին անկյունների կիսորդներին: Ապացուցեք, որ MK հատվածը հավասար է ABC եռանկյան կիսապարագծին:

399. AA_1, BB_1 և CC_1 հատվածները ABC եռանկյան գագաթները միացնում են հանդիպակաց կողմերի ներքին կետերին: Ապացուցեք, որ այդ հատվածների միջնակետերը չեն գտնվում մի ուղղի վրա:

400. Եռանկյան երեք բարձրությունների միջնակետերը գտնվում են մի ուղղի վրա: Ապացուցեք, որ այդ եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է:

401. ABC եռանկյան AC կողմը կրկնակի մեծ է BC կողմից: Տարված են այդ եռանկյան CM կիսորդը և C գագաթին հարակից արտաքին անկյան կիսորդը, որն AB ուղիղը հատում է K կետում:

Ապացուցեք, որ $S_{BCM} = \frac{1}{2}S_{ACM} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{4}S_{CMK}$:

402. ABC եռանկյան A գագաթով տարված է ուղիղ, որը BM միջնագիծը տրոհում է 1:2 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից, ընդ որում՝ այդ ուղիղը BC կողմը հատում է K կետում: Գտեք ABK և ABC եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը:

403. $ABCD$ զուգահեռագծի A գագաթով տարված է ուղիղ, որը BD, CD և BC ուղիղները հատում է, համապատասխանաբար, M, N և P կետերում: Ապացուցեք, որ AM հատվածը MN և MP հատվածների համեմատական միջինն է:

404. Կառուցեք հավասարասրուն սեղանի մեծ հիմքին պատկանող այն կետը, որի հեռավորությունը մինչև մի սրունքը n անգամ ավելի մեծ է, քան՝ մինչև մյուս սրունքը (n=2,3,4):

405. C կետն ընկած է AB հատվածի վրա: AB ուղղի վրա կառուցեք AB հատվածին չպատկանող D կետն այնպես, որ $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$: Արդյոք մի՞շտ լուծում ունի խնդիրը:

406. Կառուցեք եռանկյունը՝ եթե տրված են նրա երկու կողմը և դրանցով կազմված անկյան կիսորդը:

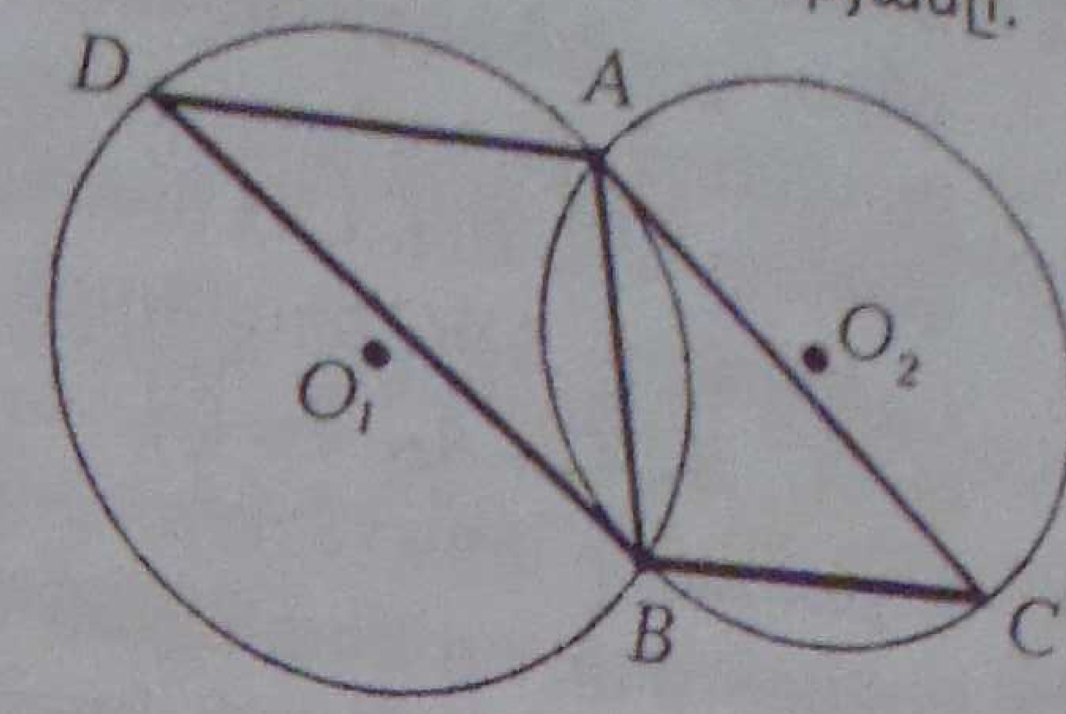
407. Կառուցեք ABC եռանկյունը, եթե տրված են $\angle A$-ն, $\angle C$-ն և մի հատված, որը հավասար է AC կողմի և BH բարձրության գումարին:

408. Կառուցեք եռանկյունը՝ ըստ տրված երեք բարձրության:

409. Կառուցեք սեղանը՝ ըստ սրունքի, մեծ հիմքի, դրանցով կազմված անկյան և մյուս երկու կողմերի հարաբերության:

410. Կառուցեք տրված քառակուսուն հավասարամեծ շեղանկյունը, եթե հայտնի է, որ այդ շեղանկյան անկյունագծերի հարաբերությունը հավասար է տրված հատվածների հարաբերությանը:

411. AC ուղիղը O_1 կենտրոնով շրջանագծի շոշափողն է, իսկ BD ուղիղը՝ O_2 կենտրոնով շրջանագծի շոշափողը (նկ. 95): Ապացուցեք, որ **ա)** $AD \parallel BC$,
բ) $AB^2=AD \cdot BC$,
գ) $BD^2:AC^2=AD:BC$:



Նկ. 95

412. Շրջանագիծը երկու հատվող ուղիղներից անջատում է հավասար լարեր, ընդ որում՝ այդ ուղիղների հատման կետը չի գտնվում շրջանագծի վրա: Ապացուցեք, որ այդ ուղիղների հատման կետից մինչև մեկ և մյուս լարի ծայրակետերը եղած հեռավորությունները համապատասխանաբար հավասար են իրար:

413. Ապացուցեք, որ տրված շրջանագծի բոլոր AB լարերի համար $\dfrac{AB^2}{AD}$ մեծությունը, որտեղ AD-ն A կետի հեռավորությունն է B կետում տարված շոշափողից, ունի միևնույն արժեքը:

414. ABC հավասարակողմ եռանկյան ABC անկյան ներսում վերցված է M կետն այնպես, որ $\angle BMC=30^0$, $\angle BMA=17^0$: Գտեք BAM և BCM անկյունները:

415. ABC եռանկյան յուրաքանչյուր գագաթով տարված է ուղիղ, որն ուղղահայաց է եռանկյան այդ նույն գագաթով անկյան կիսորդին: Տարված ուղիղները հատվելիս առաջացնում են մի նոր եռանկյուն: Ապացուցեք, որ այդ եռանկյան գագաթներն ընկած են ABC եռանկյան կիսորդներն ընդգրկող ուղիղների վրա:

416. BD հատվածը ABC եռանկյան կիսորդ է: Ապացուցեք, որ $BD^2=AB \cdot BC-AD \cdot DC$:

417. Շրջանագծին ներգծված $ABCD$ քառանկյան A և B անկյունների կիսորդները հատվում են CD կողմի վրա գտնվող կետում: Ապացուցեք, որ $CD=BC+AD$:

418. Ապացուցեք, որ շրջանագծին արտագծված ուղղանկյուն սեղանի մակերեսը հավասար է հիմքերի արտադրյալին:

419. Ապացուցեք, որ շրջանագծին ներգծված ցանկացած քառանկյան անկյունագծերի արտադրյալը հավասար է հանդիպակաց կողմերի արտադրյալների գումարին (*Պտղոմեոսի* թեորեմը):

420. Ապացուցեք, որ ցանկացած եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի R շառավիղի, ներգծյալ շրջանագծի r շառավիղի և այդ շրջա-

նագծերի կենտրոնների d հեռավորության համար տեղի ունի $d^2=R^2-2Rr$ հավասարությունը (*Էյլերի* բանաձևը):

421. Անհավասար կողմերով ABC եռանկյան համար O կետը արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնն է, H-ը՝ AA_1, BB_1, CC_1 բարձրությունները ընդգրկող ուղիղների հատման կետը, A_2, B_2, C_2 կետերը AH, BH, CH հատվածների միջնակետերն են, իսկ A_3, B_3, C_3 կետերը՝ ABC եռանկյան կողմերի միջնակետերը: Ապացուցեք, որ A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 կետերը գտնվում են միևնույն շրջանագծի վրա (*Էյլերի* շրջանագիծը):

422. Ապացուցեք, որ եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի կամայական կետից այդ եռանկյան կողմերն ընդգրկող ուղիղներին տարված ուղղահայացների հիմքերը գտնվում են մի ուղղի վրա (*Սիմպսոնի* ուղիղը):

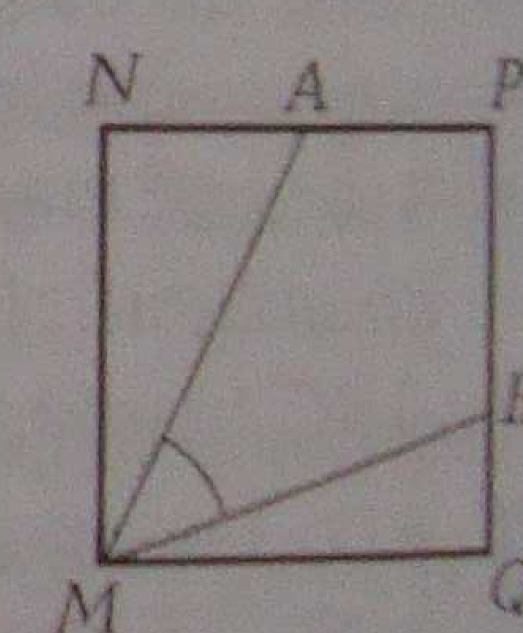
423. Կառուցեք եռանկյունը, եթե տրված են. **ա)** կողմը, նրա հանդիպակաց անկյունը և այդ կողմին տարված բարձրությունը, **բ)** անկյունը, այդ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը և պարագիծը:

424. Կառուցեք եռանկյունը, եթե տրված են արտագծյալ շրջանագիծն ու նրա վրա H, L և M կետերը, որոնցով անցնում են եռանկյան նույն գագաթից տարված բարձրությունը, կիսորդը և միջնագիծն ընդգրկող ուղիղները:

425. Տրված են մի ուղղի վրա չգտնվող երեք կետեր: Կառուցեք եռանկյուն, որի համար այդ կետերը կլինեն բարձրությունների հիմքերը: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:

Եռանկյունների լուծումը

426. $MNPQ$ քառակուսու կողմերի վրա վերցված են A և B կետերն այնպես, որ $NA=\frac{1}{2}MN$, $QB=\frac{1}{3}MN$ (նկ. 96): Ապացուցեք, որ $\angle AMB=45^0$:



Նկ. 96

427. $ABCD$ քառանկյան AC և BD անկյունագծերը հատվում են O կետում: ODC եռանկյան մակերեսը համեմատական միջին է OBC և OAD եռանկյունների մակերեսներին: Ապացուցեք, որ $ABCD$-ն AD և BC հիմքերով սեղան է, կամ զուգահեռագիծ է:

428. Ապացուցեք, որ a, b, c, d (հաջորդական) կողմերով կամայական քառանկյան S մակերեսի համար տեղի ունի $S\le\frac{1}{2}(ac+bd)$ անհավասարությունը:

429. Ապացուցեք, որ ABC եռանկյան AA_1 կիսորդը հաշվվում է

$$AA_1 = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

բանաձևով, որտեղ $b=AC$, $c=AB$:

430. Շրջանագծին ներգծած քառանկյան անկյունագծերն արտահայտեք նրա կողմերով:

431. Ապացուցեք, որ շրջանագծին ներգծված քառանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ բանաձևով, որտեղ p-ն քառանկյան կիսապարագիծն է, իսկ a-ն, b-ն, c-ն և d-ն նրա կողմերն են:

432. Ապացուցեք, որ եռանկյան կողմերը կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա այն և միայն այն դեպքում, երբ եռանկյան ներգծյալ և արտագծյալ շրջանագծերի կենտրոններով անցնող ուղիղը ուղղահայաց է նրա կիսորդներից որևէ մեկին:

433. $ABCD$ ուղղանկյուն սեղանի AD փոքր հիմքը 3 է, իսկ հիմքերին ոչ ուղղահայաց CD սրունքը՝ 6: E կետը CD հատվածի միջնակետն է, իսկ CBE անկյունը հավասար է α: Գտեք $ABCD$ սեղանի մակերեսը:

434. ABC սուրանկյուն եռանկյան AB կողմը մեծ է BC կողմից, AM և CN հատվածները եռանկյան բարձրություններն են, իսկ O-ն արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնն է: ABC անկյունը β է, իսկ $NOMB$ քառանկյան մակերեսը՝ S: Գտեք AC կողմը:

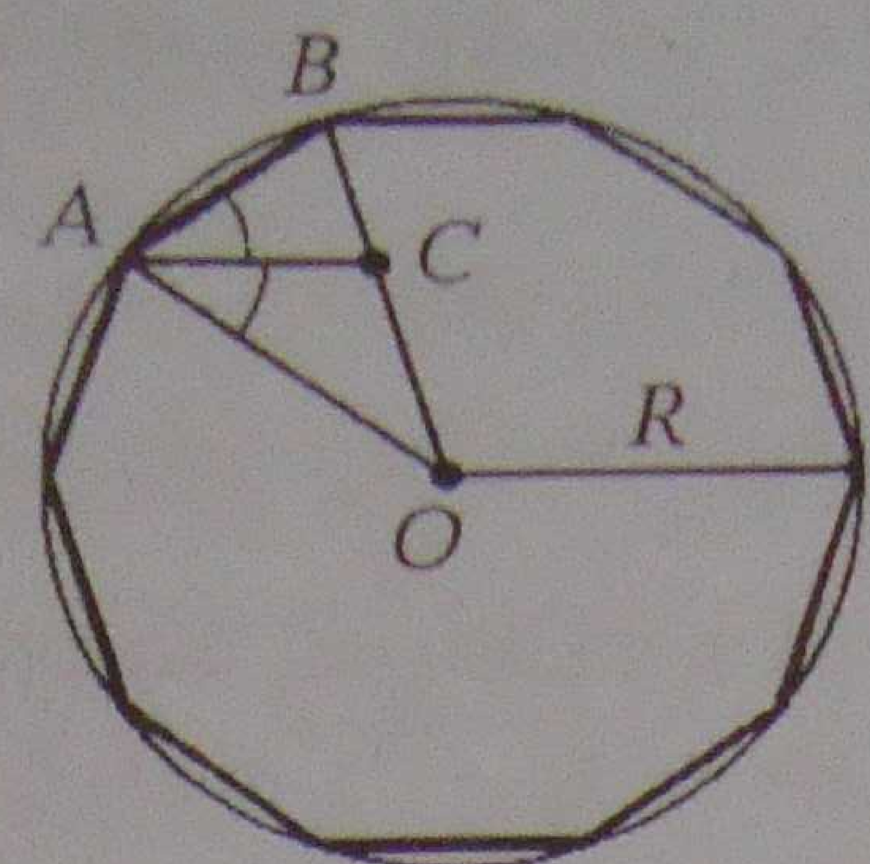
435. Տրված են ABC եռանկյան h երկարությամբ AH բարձրությունը, ℓ երկարությամբ AM միջնագիծը, AN կիսորդը: N կետը MH հատվածի միջնակետն է: Գտեք A գագաթի հեռավորությունը ABC եռանկյան բարձրությունների հատման կետից:

Շրջանագծի երկարությունը և շրջանի մակերեսը

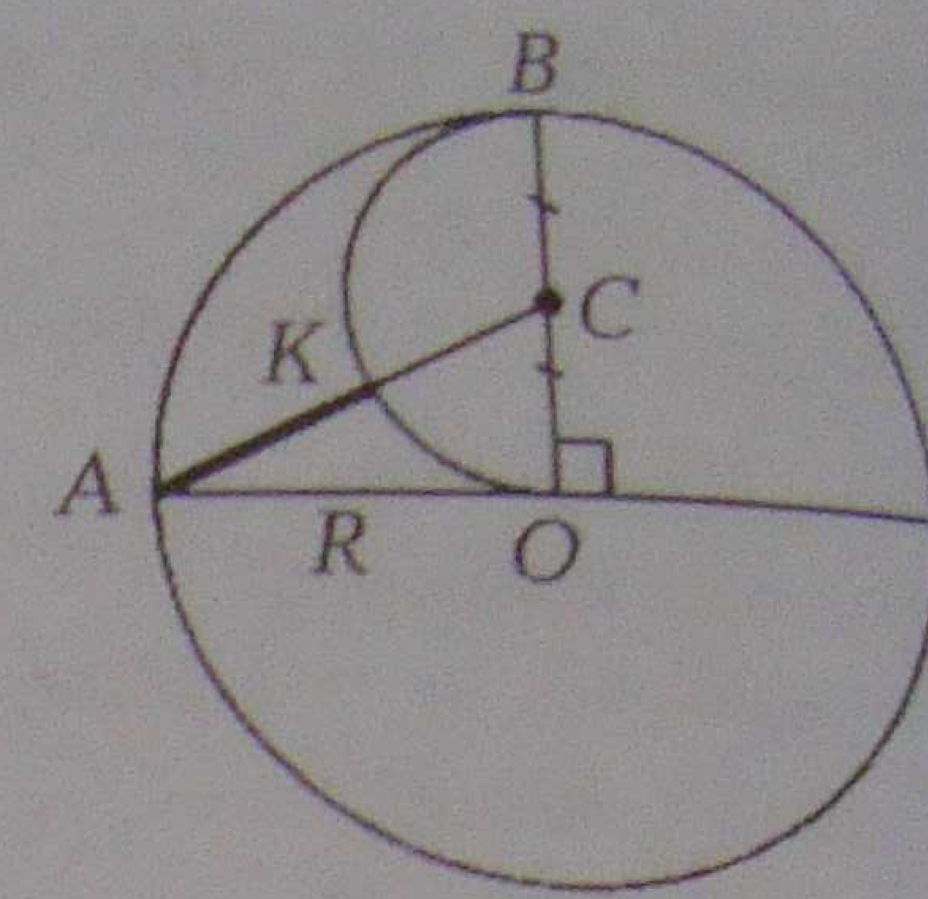
436. Նկար 97-ում պատկերված է կանոնավոր տասնանկյուն՝ ներգծված R շառավիղով շրջանագծին: AC-ն OAB անկյան կիսորդն է: Ապացուցեք, որ. **ա)** $\Delta ABC \sim \Delta OAB$, **բ)** $AB = AC = OC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$:

437. Ապացուցեք, որ նկար 98-ում պատկերված AK հատվածը այն կանոնավոր տասնանկյան կողմն է, որը ներգծված է O կենտրոնով շրջանագծին:

438. $A_1A_2A_3A_4A_5$ կանոնավոր հնգանկյանը արտագծված է O կենտրոնով շրջանագիծ: ABC եռանկյան գագաթները հնգանկյան



Նկ. 97



Նկ. 98

A_1A_2, A_2A_3 և A_3A_4 կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցեք, որ տրված շրջանագծի O կենտրոնը և ABC եռանկյան ներգծյալ շրջանագծի O_1 կենտրոնը համաչափ են AC ուղղի նկատմամբ:

439*. Տրված շրջանագծին ներգծեք կանոնավոր տասնանկյուն:

440*. Տրված շրջանագծին ներգծեք կանոնավոր հնգանկյուն:

441. Տրված շրջանագծին ներգծեք հնգաթև աստղ:

442. Դիցուք՝ M-ը կամայական կետ է, որն ընկած է կանոնավոր n-անկյան ներսում: Ապացուցեք, որ n-անկյան կողմերն ընդգրկող ուղիղներին M կետից տարված ուղղահայացների երկարությունների գումարը հավասար է nr, որտեղ r-ը ներգծյալ շրջանագծի շառավիղն է:

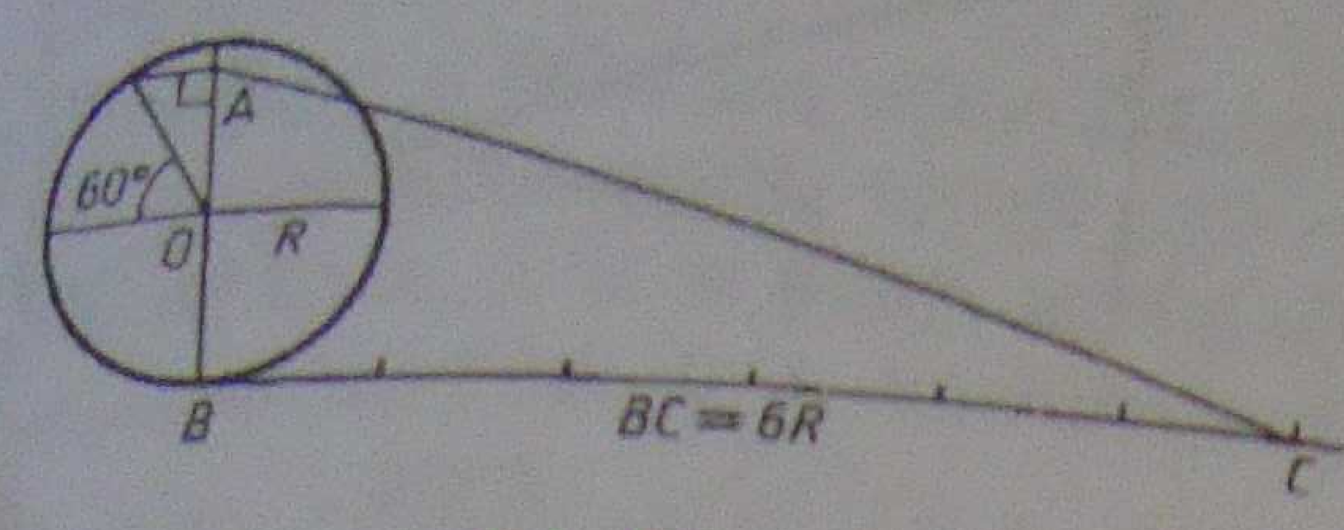
443. Եռանկյան անկյունները կազմում են 2 հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիա: Ապացուցեք, որ այդ եռանկյան կողմերի միջնակետերը և բարձրությունների հիմքերը կարող են լինել կանոնավոր յոթանկյան վեց գագաթներ:

444. R շառավիղով շրջանագծին ներգծված են $ABCD$ քառակուսին և $A_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյունը: Ապացուցեք, որ $AB+A_1B_1$ գումարը $0{,}01R$ ճշգրտությամբ հավասար է կիսաշրջանագծի երկարությանը:

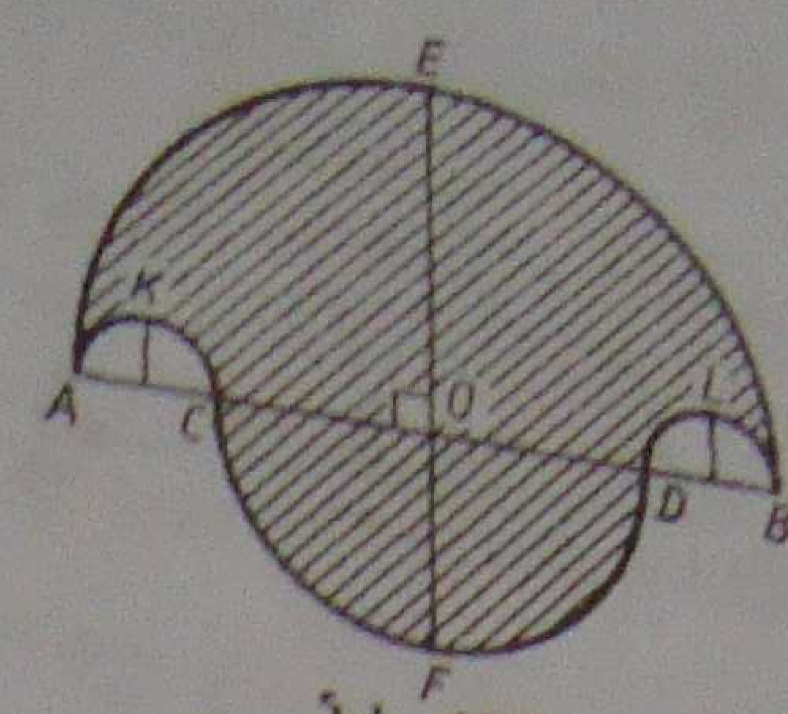
445. Ըստ նկար 99-ի տվյալների՝ ապացուցեք, որ AC հատվածի երկարությունը հավասար է O կենտրոնով և R շառավիղով շրջանագծի երկարությանը՝ $0{,}001R$ ճշգրտությամբ:

446. Նկար 100-ում պատկերված են չորս կիսաշրջան՝ AEB-ն, AKC-ն, CFD-ն, DLB-ն, ընդ որում՝ $AC=DB$: Ապացուցեք, որ ստվերագծված պատկերի մակերեսը հավասար է այն շրջանի մակերեսին, որը կառուցվում է EF տրամագծով:

447. Կառուցեք այն շրջանի եզրագիծը, որի մակերեսը հավասար է. **ա)** տրված երկու համակենտրոն շրջանագծերով սահմանափակված օղակի մակերեսին, **բ)** տրված կիսաշրջանի մակերեսին, **գ)** տրված այն շրջանային սեկտորի մակերեսին, որ սահմանափակված է 60° աղեղով:



Նկ. 99



Նկ. 100

448. Ապացուցեք վեկտորը թվով բազմապատկման հիմնական հատկությունները (կետ 45):

Լուծում: 1.Ապացուցենք, որ ցանկացած k, ℓ թվերի և կամայական $\vec{a}$ վեկտորի համար տեղի ունի $(k\ell)\vec{a} = k(\ell\vec{a})$ հավասարությունը:

Եթե $\vec{a} = \vec{0}$, ապա այս հավասարության տեղի ունենալն ակնհայտ է: Ենթադրենք $\vec{a} \neq \vec{0}$, ստանում ենք.

$$|(k\ell)\vec{a}| = |k\ell||\vec{a}| = |k||\ell||\vec{a}| = |k||\ell\vec{a}| = |k(\ell\vec{a})|:$$

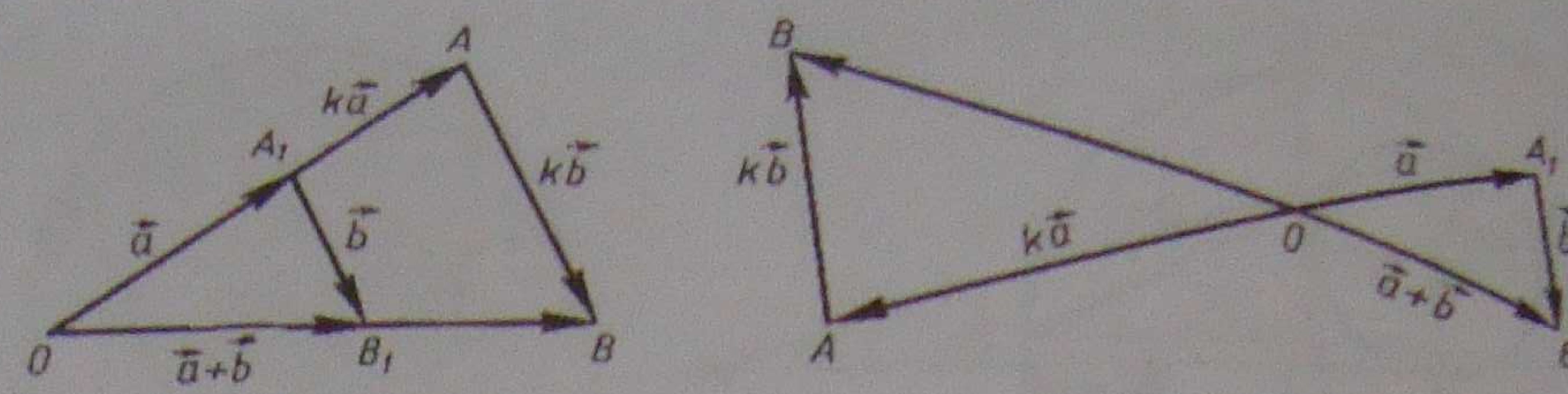
Այնուհետև, եթե $k\ell \geq 0$, ապա $(k\ell)\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ և $k(\ell\vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a}$, իսկ եթե $k\ell < 0$, ապա $(k\ell)\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ և $k(\ell\vec{a}) \uparrow\downarrow \vec{a}$: Թե մեկ, և թե մյուս դեպքում $(k\ell)\vec{a} \uparrow\uparrow k(\ell\vec{a})$: Հետևաբար՝ $(k\ell)\vec{a} = k(\ell\vec{a})$:

2.Ապացուցենք, որ ցանկացած k թվի և կամայական $\vec{a}$ ու $\vec{b}$ վեկտորների համար տեղի ունի $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ հավասարությունը: Եթե k=0, ապա այդ հավասարության տեղի ունենալը ակնհայտ է: Ենթադրենք $k \neq 0$: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են ($\vec{a} \| \vec{b}$ դեպքը դիտեք ինքնուրույն):

Որևէ O կետից տեղադրենք $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}$ և $\overrightarrow{OA} = k\vec{a}$ վեկտորները, իսկ A_1 և A կետերից՝ $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{b}$ և $\overrightarrow{AB} = k\vec{b}$ վեկտորները (նկ. 101,ա,բ):

OA_1B_1 և OAB եռանկյունները նման են. նմանության գործակիցն է $|k|$: Հետևաբար՝ $\overrightarrow{OB} = k\,\overrightarrow{OB_1} = k(\vec{a} + \vec{b})$: Մյուս կողմից՝ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = k\vec{a} + k\vec{b}$:

Այսպիսով՝ $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$:



$k>0$ $\quad$ $k<0$

$\overrightarrow{OB}=k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ $\quad$ $\overrightarrow{OB}=k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

ա) $\quad$ բ)

Նկ. 101

3.Ապացուցենք, որ ցանկացած k, ℓ թվերի և կամայական $\vec{a}$ վեկտորի համար տեղի ունի $(k+\ell)\vec{a}=k\vec{a}+\ell\vec{a}$ հավասարությունը: Եթե $k=\ell=0$, ապա այդ հավասարության տեղի ունենալը ակնհայտ է: Ենթադրենք՝ k, ℓ թվերից գոնե մեկը զրո չէ: Որոշակիության համար ընդունենք, որ $|k|\geq|\ell|$ և, ուրեմն, $k\neq 0$, $\left|\dfrac{\ell}{k}\right|\leq 1$: Դիտարկենք $\vec{a}+\dfrac{\ell}{k}\vec{a}$ վեկտորը: Ակնհայտ է, որ $\left(\vec{a}+\dfrac{\ell}{k}\vec{a}\right)\uparrow\uparrow\vec{a}$:

Այնուհետև՝ $\left|\vec{a}+\dfrac{\ell}{k}\vec{a}\right|=|\vec{a}|+\dfrac{\ell}{k}|\vec{a}|=\left(1+\dfrac{\ell}{k}\right)|\vec{a}|$: Հետևաբար, ըստ վեկտորի ու թվի արտադրյալի սահմանման, $\vec{a}+\dfrac{\ell}{k}\vec{a}=\left(1+\dfrac{\ell}{k}\right)\vec{a}$: Այս հավասարության երկու կողմը բազմապատկենք k թվով՝ ստանում ենք $k\vec{a}+\ell\vec{a}=(k+\ell)\vec{a}$:

449. Տրված են $MNPQ$ քառանկյունը և O կետը: Ի՞նչ պատկեր է այդ քառանկյունը, եթե $\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$:

450. Տրված են $ABCD$ քառանկյունը և O կետը: E, F, G, H կետերը O կետի համաչափն են, համապատասխանաբար, AB, BC, CD, DA կողմերի միջնակետերի նկատմամբ: Ի՞նչ պատկեր է $EFGH$ քառանկյունը:

451. Տրված է ABC եռանկյունը: Ապացուցեք, որ $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ վեկտորն ուղղված է A անկյան կիսորդի երկայնքով, իսկ $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}-\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$

վեկտորը՝ A գագաթին հարակից արտաքին անկյան կիսորդի երկայնքով:

452. Ապացուցեք հետևյալ պնդումը. երեք՝ A, B, C կետեր գտնվում են մի ուղղի վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունեն այնպիսի k, ℓ և m թվեր, որոնք միաժամանակ զրո չեն, և որոնց համար $k+\ell+m=0$, և կամայական O կետի համար տեղի ունի $k\vec{OA}+\ell\vec{OB}+m\vec{OC}=\vec{0}$ հավասարությունը:

453. Օգտվելով վեկտորներից՝ ապացուցեք, որ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածների հատման կետը և նրա անկյունագծերի միջնակետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

454. ABC եռանկյան A, B և C գագաթներին հարակից արտաքին անկյունների կիսորդները հատում են BC, CA և AB ուղիղները, համապատասխանաբար, A_1, B_1 և C_1 կետերում: Վեկտորների կիրառությամբ ապացուցեք, որ A_1, B_1 և C_1 կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

455. Դիցուք՝ H-ը անհավասար կողմերով ABC եռանկյան բարձրությունները ընդգրկող ուղիղների հատման կետն է, իսկ O-ն այդ եռանկյանն արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Օգտվելով վեկտորներից՝ ապացուցեք, որ եռանկյան միջնագծերի հատման G կետը գտնվում է HO հատվածի վրա և այդ հատվածը տրոհում է 2:1 հարաբերությամբ, այսինքն՝ $\frac{HG}{GO}=2$:

ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԱՔՍԻՈՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Երկրաչափության ուսումնասիրության ընթացքում մենք հիմնվում էինք մի շարք աքսիոմների վրա: Հիշենք, որ աքսիոմ են կոչվում երկրաչափության այն հիմնական դրույթները, որոնք ընդունվում են որպես ելակետային: Դրանք, այսպես կոչված, հիմնական հասկացությունների հետ մեկտեղ կազմում են այն հիմքը, որի վրա կառուցվում է ողջ երկրաչափությունը: Առաջին հիմնական հասկացությունները, որոնց մենք ծանոթացել ենք, կետն և ուղիղ հասկացություններն են: Հիմնական հասկացությունների սահմանումները չեն տրվում, սակայն նրանց հատկություններն արտահայտվում են աքսիոմների միջոցով: Օգտագործելով հիմնական հասկացություններն ու աքսիոմները մենք սահմանում ենք նոր հասկացություններ, ձևակերպում և ապացուցում թեորեմներ և այդպիսով ուսումնասիրում ենք երկրաչափական պատկերների հատկությունները:

Նկատի ունենանք, որ հարթաչափության կառուցման համար անհրաժեշտ ոչ բոլոր աքսիոմներն են բերված մեր դասընթացում: Շարադրանքը չբարդացնելու համար դրանցից մի քանիսը մենք չենք ձևակերպել, թեև օգտագործել ենք: Ստորև կներկայացնենք հարթաչափության բոլոր աքսիոմները:

Առաջին երեք աքսիոմները բնութագրում են կետերի և ուղիղների փոխադարձ դասավորությունը:

1. *Յուրաքանչյուր ուղղին պատկանում են առնվազն երկու կետեր*[1]*:*

2. *Գոյություն ունեն մի ուղղի վրա չգտնվող առնվազն երեք կետեր:*

3. *Յանկացած երկու կետերով անցնում է ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը:*

Մի ուղղի վրա գտնվող կետերի համար մենք օգտագործում ենք «միջև ընկած» հասկացությունը, որը դասում ենք երկրաչափության հիմնական հասկացությունների թվին: Այս հասկացության հատկությունն արտահայտվում է հետևյալ աքսիոմի միջոցով.

4. *Ուղղի երեք կետերից մեկը, ընդ որում միայն մեկը, ընկած է մյուս երկուսի միջև:*

---

[1] Մի շարք հասկացություններ, ինչպես օրինակ՝ «պատկանելություն», «բազմություն», «թիվ» և այլն, վերաբերում են ոչ միայն երկրաչափությանը, այլև մաթեմատիկայի մյուս բաժիններին: Այդ առումով՝ մենք համարում ենք, որ դրանք հայտնի են, և չենք դասում հարթաչափության հիմնական հասկացությունների թվին:

Ընդգծենք, որ ասելով «B կետն ընկած է A և C կետերի միջև», մենք նկատի ունենք, որ A-ն, B-ն, C-ն ուղղի տարբեր կետեր են, և B կետն ընկած է նաև C և A կետերի միջև: Այդ բանը երբեմն այլ խոսքերով ասում ենք, որ A և B կետերն ընկած են C կետի միևնույն կողմում (նմանապես՝ B և C կետերն ընկած են A կետի միևնույն կողմում), կամ՝ A և C կետերն ընկած են B կետի տարբեր կողմերում:

5. *Ուղղի յուրաքանչյուր O կետն այն տրոհում է երկու մասի (ճառագայթների) այնպես, որ միևնույն ճառագայթի ցանկացած երկու կետերն ընկած են O կետի միևնույն կողմում, իսկ տարբեր ճառագայթների ցանկացած երկու կետերը՝ O կետի տարբեր կողմերում:*

Ընդունում ենք, որ այդ դեպքում O կետը չի պատկանում նշված ճառագայթներից թե մեկին, և թե մյուսին:

Հիշենք, որ AB հատված կոչվում է այն երկրաչափական պատկերը, որը կազմված է A և B կետերից և AB ուղղի այն բոլոր կետերից, որոնք ընկած են A և B կետերի միջև: Հակիրճ կարելի է ասել այսպես. հատվածն ուղղի՝ երկու կետերով սահմանափակված մասն է: Եթե AB հատվածը a ուղղի հետ չունի ընդհանուր կետ, ապա ասում են, որ A և B կետերն ընկած են a ուղղի միևնույն կողմում: Եթե AB հատվածը հատում է a ուղիղը (A և B կետերի միջև ընկած որևէ C կետում), ապա ասում են, որ A և B կետերն ընկած են a ուղղի տարբեր կողմերում:

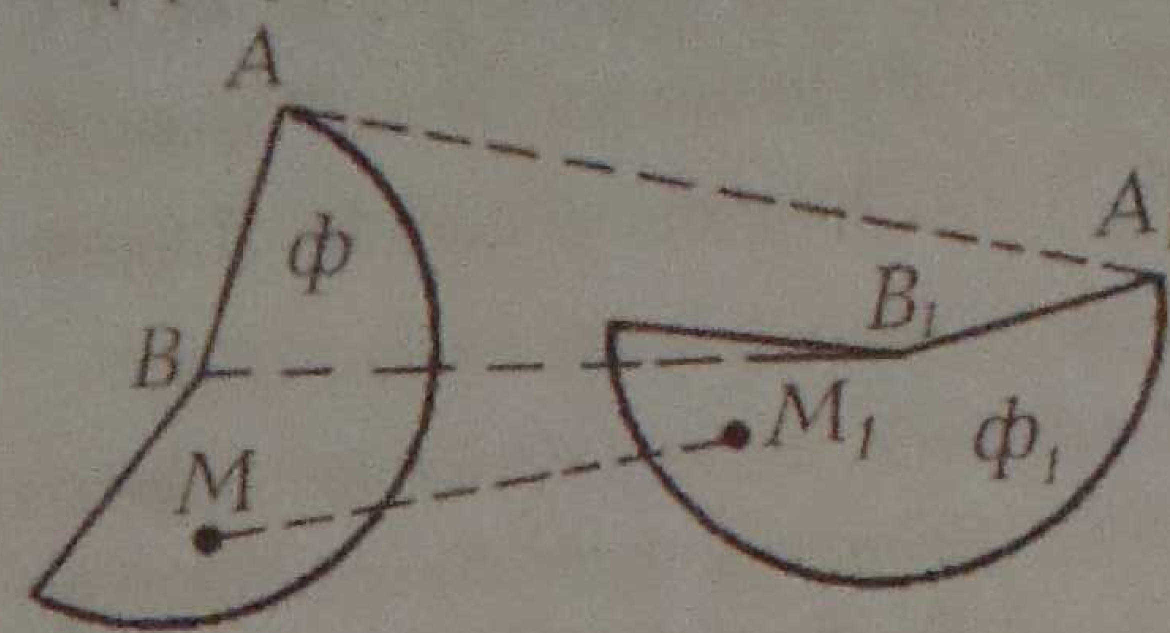
6. *Յուրաքանչյուր a ուղիղ տրոհում է հարթությունը երկու մասի (կիսահարթությունների) այնպես, որ միևնույն կիսահարթության ցանկացած երկու կետեր ընկած են a ուղղի միևնույն կողմում, իսկ տարբեր կիսահարթությունների ցանկացած երկու կետեր ընկած են a ուղղի տարբեր կողմերում:*

a ուղիղը կոչվում է նշված կիսահարթություններից յուրաքանչյուրի *սահմանագիծ*. Նրա կետերը չեն պատկանում կիսահարթություններից թե մեկին, և թե մյուսին:

Հաջորդ աքսիոմները վերաբերում են պատկերների վերադրման և հավասարության հասկացություններին: Վերադրման հասկացությունը մեր դասընթացում դասվում է երկրաչափության հիմնական հասկացությունների թվին: Երկրաչափական պատկերների հավասարությունը մենք սահմանել ենք՝ օգտագործելով վերադրման հասկացությունը: Այդ ընթացքում մենք հիմնվել ենք պատկերների վերադրման ակնառու պատկերացումների վրա և ընդունել ենք, որ ամեն մի երկրաչափական պատկեր կարելի է տեղաշարժել նման-որպես մեկ ամբողջություն՝ նյութական մարմինների տեղաշարժման նմա-

նությամբ: Սակայն, երկրաչափական պատկերները նյութական մարմիններ չեն, այլ մտքով երևակայված առարկաներ և, ուրեմն, դրանց վերադրումը հարկավոր է հասկանալ հատուկ իմաստով:

Որպեսզի պարզաբանենք այդ իմաստը՝ նկատենք, որ Φ պատկերը, մեր ակնառու պատկերացմամբ, իրեն հավասար Φ_1 պատկերին վերադրելիս Φ պատկերի յուրաքանչյուր կետը վերադրվում է Φ_1 պատկերի ինչ-որ կետի: Այլ խոսքով՝ Φ պատկերի յուրաքանչյուր կետը համադրվում է Φ_1 պատկերի որևէ կետին: Սակայն, Φ պատկերի յուրաքանչյուր կետը Φ_1 պատկերի որևէ կետին կարելի է համադրել նաև առանց Φ-ը Φ_1-ի վրա անմիջական վերադրման (նկ. 102): Այդպիսի համադրությունը կոչվում է Φ պատկերի արտապատկերում Φ_1 պատկերի վրա (այդ դեպքում հասկացվում է, որ Φ_1 պատկերի յուրաքանչյուր կետ համադրված է Φ պատկերի որևէ կետին): Ասելով Φ պատկերի վերադրում Φ_1 պատկերի վրա՝ հասկանում ենք Φ-ի արտապատկերումը Φ_1-ի վրա: Ավելին, մենք կընդունենք, որ այդ դեպքում ոչ միայն Φ պատկերի, այլև հարթության ցանկացած կետը արտապատկերվում է հարթության մի որոշակի կետի, այսինքն՝ *վերադրումը հարթության արտապատկերումն է ինքն իր վրա:*



Նկ. 102

Սակայն, հարթության՝ ինքն իր վրա արտապատկերումներից բոլորը չեն, որոնց մենք կանվանենք վերադրում: Վերադրումները հարթության՝ ինքն իր վրա այնպիսի արտապատկերումն են, որոնք օժտված են աքսիոմներով արտահայտված հատկություններով (ստորև տե՛ս 7-13 աքսիոմները): Որպեսզի ձևակերպենք այդ աքսիոմները՝ ներմուծենք պատկերների հավասարության հասկացությունը: Դիցուք՝ Φ-ն ու Φ_1-ը երկու պատկերներ են: *Եթե գոյություն ունի այնպիսի վերադրում, որի դեպքում Φ պատկերն արտապատկերում է Φ_1 պատկերի վրա, ապա կասենք, որ Φ պատկերը վերադրմամբ կարող է համընկնել Φ_1 պատկերին, և կասենք, որ Φ պատկերը հավասար է Φ_1 պատկերին:* Այժմ ձևակերպենք աքսիոմներ վերադրման հատկությունների մասին:

7. *Եթե վերադրելիս երկու հատվածների ծայրակետերը համընկնում են, ապա համընկնում են նաև իրենք՝ հատվածները:*

8. *Ցանկացած ճառագայթի վրա նրա սկզբնակետից կարելի է տեղադրել տրվածին հավասար հատված, ընդ որում՝ միայն մեկը:*

Դա նշանակում է, որ եթե տրված են որևէ AB հատված և O սկզբնակետով որևէ h ճառագայթ, ապա h ճառագայթի վրա գոյություն ունի, ընդ որում միայն մեկ, այնպիսի C կետ, որ AB հատվածը հավասար է OC հատվածին:

9. *Ցանկացած ճառագայթից տրված կիսահարթության մեջ կարելի է տեղադրել տրված չփռված անկյանը հավասար անկյուն, ընդ որում միայն մեկը:*

Դա նշանակում է, որ եթե տրված են որևէ OA ճառագայթ և ինչ-որ CDE չփռված անկյուն, ապա OA սահմանագծով կիսահարթություններից յուրաքանչյուրում գոյություն ունի, ընդ որում միայն մեկ, այնպիսի OB ճառագայթ, որ CDE անկյունը հավասար է AOB անկյանը:

10. *Ցանկացած hk անկյուն կարելի է վերադրմամբ համընկեցնել իրեն հավասար h_1k_1 անկյանը երկու եղանակով. 1)այնպես, որ h ճառագայթը համընկնի h_1 ճառագայթին, իսկ k ճառագայթը՝ k_1 ճառագայթին, 2)այնպես, որ h ճառագայթը համընկնի k_1 ճառագայթին, իսկ k ճառագայթը՝ h_1 ճառագայթին:*

11. *Ցանկացած պատկեր հավասար է ինքն իրեն:*

12. *Եթե Φ պատկերը հավասար է Φ_1 պատկերին, ապա Φ_1 պատկերը հավասար է Φ պատկերին:*

13. *Եթե Φ_1 պատկերը հավասար է Φ_2 պատկերին, իսկ Φ_2 պատկերը՝ Φ_3 պատկերին, ապա Φ_1 պատկերը հավասար է Φ_3 պատկերին:*

Ինչպես երևում է, բերված բոլոր աքսիոմները համապատասխանում են պատկերների վերադրման և հավասարության մասին մեր ակնառու պատկերացումներին և այդ առումով կասկած չեն հարուցում:

Հաջորդ երկու աքսիոմները վերաբերում են հատվածների չափմանը: Նախքան դրանց ձևակերպելը՝ հիշենք, թե ինչպես են չափվում հատվածները: Դիցուք՝ AB-ն չափման ենթակա հատվածն է, իսկ PQ-ն՝ հատվածների չափման միավորը: AB ճառագայթի վրա տեղադրենք $AA_1=PQ$ հատվածը, A_1B ճառագայթի վրա՝ $A_1A_2=PQ$ հատվածը, և այդպես շարունակ՝ քանի դեռ A_n կետը չի համընկել B կետին, կամ՝ B կետը չի հայտնվել A_n և A_{n+1} կետերի միջև: Առաջին դեպքում ասում են, որ AB հատվածի երկարությունը՝ ըստ PQ չափման միավորի արտահայտվում է n թվով (կամ՝ PQ հատվածը AB հատվածում տեղավորվում է n անգամ): Երկրորդ դեպքում կարելի է ասել, որ AB հատվածի երկարությունը՝ ըստ PQ չափման միավորի, մոտավորապես արտահայտվում է n թվով: Առավել ճշգրիտ չափելու համար PQ հատվածը բաժանում են հավասար, սովորաբար 10, մասերի և այդ մասերից մեկի միջոցով չափում են նկարագրված A_nB մնացորդը: Եթե այդ դեպքում PQ

հատվածի տասներորդ մասը չափվող մնացորդում ամբողջ թվով չի տեղավորվում, ապա այն, իր հերթին, բաժանվում է ևս 10 հավասար մասերի, և չափման ընթացքը շարունակվում է: Մենք ընդունում ենք, որ այդ եղանակով կարելի է ցանկացած հատվածը չափել, այսինքն նրա երկարությունը ըստ տրված չափման միավորի, արտահայտել վերջավոր կամ անվերջ տասնորդական կոտորակով: Այդ պնդումը հակիրճ կարելի է ձևակերպել այսպես.

14. *Ցանկացած հատվածի երկարությունը՝ ըստ հատվածների չափման ընտրված միավորի, արտահայտվում է դրական թվով:*

Բացի այդ, մենք ընդունում ենք տրված երկարությամբ հատվածի գոյության աքսիոմը:

15. *Հատվածների չափման ընտրված միավորի դեպքում ցանկացած դրական թվի համար գոյություն ունի հատված, որի երկարությունն արտահայտվում է այդ թվով:*

Հարթաչափության աքսիոմների համակարգը եզրափակում է զուգահեռ ուղիղների աքսիոմը:

16. *Տրված ուղղի վրա չգտնվող կետով անցնում է այդ ուղղին զուգահեռ միայն մեկ ուղիղ:*

Նշենք, որ երկրաչափությունը կարելի է կառուցել՝ օգտագործելով աքսիոմների տարբեր համակարգեր: Օրինակ՝ զուգահեռ ուղիղների աքսիոմի փոխարեն կարելի է որպես աքսիոմ ընդունել պնդումն այն մասին, որ եռանկյան անկյունների գումարը 180^0 է: Այդ դեպքում «Տրված ուղղի վրա չգտնվող կետով անցնում է այդ ուղղին զուգահեռ միայն մեկ ուղիղ» պնդումն արդեն կարելի է ապացուցել իբրև թեորեմ (փորձեք ինքնուրույն կատարել այդպիսի ապացուցում): Աքսիոմների տարբեր համակարգերից ընդամենը պահանջվում է, որ դրանք լինեն համարժեք, այսինքն՝ հանգեցնեն միևնույն հետևությունների:

Երբեմն խնդիր է դրվում, որ աքսիոմները լինեն անկախ, այն է՝ նրանցից որևէ մեկը հնարավոր չլինի արտածել մյուսներից: Մենք մեր առջև այդպիսի խնդիր չենք դրել: Օրինակ, աքսիոմ 5-ի պնդումը կարելի է ապացուցել՝ ելնելով մյուս աքսիոմներից: Փաստորեն, դա նշանակում է, որ այդ պնդումը թեորեմ է, այլ ոչ թե աքսիոմ: Մինչդեռ շարադրանքի պարզության նպատակով մենք այն ընդունել ենք իբրև աքսիոմ:

Որպես եզրափակում դիտարկենք մեր դասընթացի ամենաառաջին թեորեմներից մեկը, որն արտահայտում է եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշը: Մենք այն ապացուցել ենք՝ հիմնվելով պատկերների վերադրման և հավասարության մասին մեր ակնառու պատկերացումների

վրա, երբ դեռ աքսիոմի հասկացությունը ներմուծված չէր: Վերհիշենք այդ ապացուցումը և այն դիտենք մեր ընդունած աքսիոմների տեսանկյունից:

Պետք էր ապացուցել, որ եթե $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ և $\angle A=\angle A_1$, ապա ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները հավասար են: Այդ նպատակով դիտարկենք այնպիսի վերադրում, որի դեպքում A գագաթը համընկնում է A_1 գագաթին, իսկ ABC եռանկյան AB և AC կողմերը վերադրվում են համապատասխանաբար A_1B_1 և A_1C_1 ճառագայթների վրա: Այդ դեպքում մենք հիմնվում էինք ակներև այն փաստի վրա, որ այդպիսի վերադրում գոյություն ունի, քանի որ A և A_1 անկյունները հավասար են: Այժմ կարող ենք ասել, որ այդպիսի վերադրման գոյությունը բխում է աքսիոմ 10-ից: Այնուհետև մենք դատում էինք այսպես. քանի որ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, ապա AB կողմը համընկնում է A_1B_1 կողմին, իսկ AC կողմը՝ A_1C_1 կողմին, մասնավորապես՝ համընկնում են B և B_1 կետերը, C և C_1 կետերը: Իսկ ինչպե՞ս հիմնավորենք այդ փաստը՝ հիմնվելով աքսիոմների վրա: Շատ պարզ: Ըստ աքսիոմ 8-ի՝ A_1B_1 ճառագայթի վրա A_1 կետից կարելի է տեղադրել AB հատվածին հավասար միայն մեկ հատված: Բայց ըստ պայմանի՝ $AB=A_1B_1$: Ուրեմն այդ վերադրման դեպքում B կետը համընկնում է B_1 կետին: Նույն կերպ հիմնավորվում է, որ C կետը համընկնում է C_1 կետին: Մնում է վկայակոչել աքսիոմ 7-ը, որպեսզի հիմնավորվի այն փաստը, որ BC կողմը համընկնում է B_1C_1 կողմին: Այժմ կարող ենք եզրակացնել, որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները լրիվ համընկնում են և, ուրեմն, նրանք հավասար են:

Ինչպես տեսնում ենք, եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշն արտահայտող թեորեմի բուն ապացուցումը, ըստ էության, չի փոխվում, միայն թե այժմ մենք հենվում ենք ոչ թե ակնառու թվացող փաստերի, այլ այն աքսիոմների վրա, որոնցով արտահայտվում են այդ փաստերը:

ՈՐՈՇ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Երկրաչափական պարզագույն տեղեկություններ բովանդակող առաջին գրավոր վկայությունը մեզ հասել է Հին Եգիպտոսից: Այն վերագրվում է մ.թ.ա. XVIII դարին: Նրանում ամփոփված են որոշ պատկերների ու մարմինների մակերեսները ու ծավալները հաշվելու կանոններ: Այդ կանոններն ստեղծվել են զուտ գործնական եղանակով՝ առանց դրանց հիմնավորմանը վերաբերող տրամաբանական որևէ ապացուցումների:

Երկրաչափության՝ իբրև մաթեմատիկական գիտության, կայացումը տեղի է ունեցել ավելի ուշ, և այն կապված է հույն գիտնականներ Թալեսի (մոտ 625-547թթ., մ.թ.ա.), Պյութագորասի (մոտ 580-500թթ., մ.թ.ա.), Դեմոկրիտի (մոտ 460-370թթ., մ.թ.ա.), Էվկլիդեսի (III դ., մ.թ.ա.) և այլոց անունների հետ: Էվկլիդեսի հանրահայտ «Սկզբունքներ» ստեղծագործության մեջ համակարգված են երկրաչափական՝ մինչ այդ հայտնի բոլոր հիմնական տեղեկությունները: Սակայն, գլխավորն այն է, որ «Սկզբունքներում» երկրաչափության կառուցման համար մշակվել և կիրառվել է աքսիոմակարգային մոտեցում, այն է՝ նախապես ձևակերպել հիմնադրույթները (աքսիոմները), իսկ հետո՝ դրանց հիման վրա դատողությունների միջոցով ապացուցել մնացած դրույթները (թեորեմները): Ի դեպ՝ նման մոտեցման կարելիության մասին առաջինը հիշատակել է հույն մեծանուն գիտնական Արիստոտելը (մոտ 384-322թթ., մ.թ.ա.): Այդ եղանակով ստացված արդյունքներն օգտագործվել են ինչպես գործնական, այնպես էլ հետագա գիտական հետազոտական աշխատանքներում:

Էվկլիդեսի առաջարկած աքսիոմներից մի քանիսը ներկայումս ևս կիրառվում են երկրաչափության դասընթացներում: Դրանց մի մասը, ժամանակակից ձևակերպումներով, տեղ է գտել նաև մեր դասընթացում, ինչպես օրինակ. «Ցանկացած երկու կետերով անցնում է ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը»:

Երկրաչափության տարբեր հարցերի հետազոտության ասպարեզում մեծ ներդրում են ունեցել հույն գիտնականներ Արքիմեդը (մոտ 287-212թթ., մ.թ.ա.), Ապալոնիոսը (III դ., մ.թ.ա.) և այլոք:

Հետագա դարերի ընթացքում երկրաչափության զարգացումն ունեցել է հանդարտ ընթացք, իսկ այն որակապես նոր փուլ է մտել միայն շատ դարեր անց՝ մ.թ. XVII դարում: Դա կապված է եղել այդ ժամանակաշրջանում հանրա-

հաշվում կուտակված նվաճումների հետ: Ֆրանսիացի ականավոր փիլիսոփա և մաթեմատիկոս Ռ. Դեկարտը (1596-1650) առաջարկել է երկրաչափական խնդիրների լուծման մի հրաշալի մոտեցում: Իր «Երկրաչափության» մեջ (1637) նա ներմուծել է կոորդինատների մեթոդը, որով սերտ կապ է հաստատվում երկրաչափության և հանրահաշվի միջև. դա թույլ է տալիս երկրաչափական խնդիրները փոխադրել (թարգմանել) հանրահաշվի լեզվով, և դրանք լուծել հանրահաշվական մեթոդներով:

Երկրաչափության զարգացման մեջ նշանակալից դեր է ունեցել այն աքսիոմը, որը Էվկլիդեսի «Սկզբունքներում» կրում է հինգերորդ պոստուլատ անվանումը: Այդ պոստուլատի՝ Էվկլիդեսի ձևակերպումը բավական բարդ է:* Այդ պատճառով, սովորաբար, այն փոխարինվում է դրան համարժեք՝ զուգահեռ ուղիղների աքսիոմով, այն է՝ տրված ուղղի վրա չգտնվող կետով անցնում է այդ ուղղին զուգահեռ միայն մեկ ուղիղ:

Դարեր շարունակ շատ գիտնականներ ջանքեր են գործադրել, որպեսզի ապացուցեն հինգերորդ պոստուլատը: Բանն այն է, որ ձգտում կար աքսիոմների թիվը հասցնել նվազագույնի: Իսկ գիտնականներին թվում էր, թե հիմք ընդունելով մնացած աքսիոմները՝ հնարավոր կլինի հինգերորդ պոստուլատը որպես թեորեմ, ապացուցել և այդպիսով՝ կրճատել աքսիոմների թիվը: Սակայն, որքան էլ համառ էին գիտնականների ջանքերը, հինգերորդ պոստուլատն ապացուցելու յուրաքանչյուր փորձ դատապարտվում էր անհաջողության: Ահա XVIII դարի վերջում որոշ երկրաչափների մոտ միտք հղացավ, որ այդ պոստուլատն ապացուցել հնարավոր չէ: Այդ հիմնահարցի լուծումը հայտնաբերել է ռուս մեծ մաթեմատիկոս, Կազանի համալսարանի պրոֆեսոր և, ապա, ռեկտոր՝ Նիկոլայ Լոբաչևսկին (1792-1856):

Ինչպես շատերը՝ Լոբաչևսկին ևս ցանկացել է ապացուցել Էվկլիդեսի հինգերորդ պոստուլատը և դա փորձել է՝ կատարելով հակասող ենթադրություն: Նա ենթադրել է, որ տրված ուղղի վրա չգտնվող կետով անցնում են այդ ուղղին չհատվող մի քանի ուղիղներ: Ելնելով դրանից՝ նա փորձել է ստանալ այնպիսի հետևություն, որը հակասում է մյուս աքսիոմներին կամ արդեն ապացուցված թեորեմներին: Եթե ստացվեր այդպիսի հակասող հետևություն, ապա դա կնշանակեր, որ արված ենթադրությունը ճշմարիտ չէ և, ուրեմն, ճշմարիտ է դրա հակառակ պնդումը, այն է՝ տրված ուղղի վրա չգտնվող կետով

---

* Հինգերորդ պոստուլատը. «Եվ եթե ուղիղը, որը թեքված է երկու ուղիղների հանդեպ, կազմում է ներքին՝ մի կողմում ընկած և երկու ուղիղ անկյուններից փոքր անկյուններ, ապա այդ ուղիղներն անսահմանորեն շարունակվելով՝ կհանդիպեն այն կողմում, որտեղ այդ անկյունները փոքր են երկու ուղիղ անկյուններից»:

անցնում է այդ ուղիղը չհատող միայն մեկ ուղիղ: Դրանով իսկ կապացուցվեր էվկլիդեսի հինգերորդ պոստուլատը:

Սակայն Լոբաչևսկին հակասական պնդումներ չի ստացել: Դա հիմք է տվել նրան՝ կատարելու մի նշանավոր եզրակացություն. կարելի է կառուցել մի ուրիշ երկրաչափություն, որը տարբեր է էվկլիդեսի երկրաչափությունից: Ավելին, Լոբաչևսկին կառուցել է այդպիսի երկրաչափություն. այդ հայտնագործության մասին նա հաղորդել է 1826թ.:

Այդ շրջանում նույնանման հայտնագործություն կատարել է նաև հունգարացի մաթեմատիկոս Յ. Բոյային (1802-1860), որն իր արդյունքները հրապարակել է քիչ ավելի ուշ, 1832 թվին: Գերմանացի մեծ մաթեմատիկոս Կ. Ֆ. Գաուսի (1777-1855) ձեռագրերում ևս արտահայտված են գաղափարներ, որոնք մոտ են Լոբաչևսկու և Բոյայիի գաղափարներին: Սակայն նա, խուսափելով քննադատություններից, այդ աշխատանքները չի հրապարակել:

Նոր երկրաչափության հայտնագործությունը վիթխարի ազդեցություն է ունեցել գիտության զարգացման վրա, այն լայն կիրառություն ունի բնագիտության մեջ, հսկայական է նրա դերը մաթեմատիկայի և, մասնավորապես, հենց երկրաչափության հետագա զարգացման գործընթացում: Դրա առավել ցայտուն դրսևորումն է հատկապես տարածության մասին մեր պատկերացումների հետագա խորացումը: Չէ՞ որ նախքան նոր երկրաչափության բացահայտումը թվում էր, թե մեր շրջակա տարածության երկրաչափությունը կարող է լինել միայն էվկլիդեսյան երկրաչափությունը: Սակայն, երբ պարզվում է, որ հնարավոր է նաև այլ երկրաչափություն, բնականաբար, բարձրանում է այս կամ այն երկրաչափության ճշմարտացիության հարցը, ինչը կարող է լուծվել միայն փորձնական ստուգման միջոցով: Ժամանակակից գիտությունը հաստատում է, որ էվկլիդեսյան երկրաչափությունը, թեև բավականաչափ մեծ ճշգրտությամբ, այնուհանդերձ միայն մոտավորապես է արտացոլում մեր շրջակա տարածության հատկությունները, իսկ առավել մեծ՝ տիեզերական ոլորտներում այն նկատելի տարբերություն ունի իրական տարածության երկրաչափությունից:

Մաթեմատիկայի բուռն թափով զարգացումը XIX դարում առաջ է բերել մի շարք նշանակալից հայտնագործություններ նաև երկրաչափության բնագավառում: Դրանցից մեկը գերմանացի ականավոր մաթեմատիկոս Բ. Ռիմանի (1826-1866) ստեղծած երկրաչափությունն է: Այն ընդհանրացնում է էվկլիդեսյան երկրաչափությունը և Լոբաչևսկու երկրաչափությունը:

Ընթերցողն իրավացիորեն կարող է հարցնել. իսկ արդյոք անհակասակա՞ն են էվկլիդեսյան կամ ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափությունները, չի՞ կարող

պատահել այնպես, որ հետագա ծավալման ընթացքում այս կամ այն երկրաչափության մեջ ի հայտ գան հակասական հետևություններ: Այդ խնդիրը սերտորեն կապված է երկրաչափություններից յուրաքանչյուրը որոշող աքսիոմների համակարգի անհակասականության, լրիվության և անկախության հիմնահարցերի հետ: Նշված հիմնահարցերը վերաբերում են մի առանձին գիտաճյուղի, որը կոչվում է *«Երկրաչափության հիմունքներ»*: Այդ հիմնահարցերի լուծման գործում վիթխարի ավանդ ունի գերմանացի մեծ մաթեմատիկոս Դ. Հիլբերտը (1862-1943):

Մենք շատ հակիրճ շոշափեցինք ընդամենը մի քանի հանգամանքներ երկրաչափության զարգացման պատմությունից: Իսկ ավելի հանգամանալի տեղեկություններ այդ հարցերի շուրջ կարելի է ստանալ լրացուցիչ գրականությունից: Մնում է ավելացնել, որ ներկայումս երկրաչափությունը լայն կիրառություններ ունի բնագիտական տարբեր գիտաճյուղերում՝ ֆիզիկայում, քիմիայում, կենսաբանության մեջ և այլուր: Անգնահատելի է երկրաչափության դերը կիրառական գիտություններում, օրինակ՝ մեքենաշինության, երկրաբանության, քարտեզագրության, ինչպես նաև ճարտարագիտության մեջ: Երկրաչափության մեթոդները գործնականում լայնորեն կիրառվում են գիտության, տեխնիկայի և, առհասարակ, մարդկային գործունեության գրեթե բոլոր բնագավառներում և, անշուշտ, բուն մաթեմատիկայում:

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՂՅՈՒՍԱԿՆԵՐԻ ՕԳՏԱԳՈՐԾՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Բրադիսի քառանիշ մաթեմատիկական աղյուսակների օգնությամբ կարելի է գտնել $\sin\alpha$-ի, $\cos\alpha$-ի, $\mathrm{tg}\alpha$-ի մոտավոր արժեքները $0^0 \le \alpha \le 180^0$ միջակայքի α անկյունների համար, ընդ որում՝ մեկ րոպե քայլով, այսինքն՝ 0^0, $0^0 1$, $0^0 2$ և այլ անկյունների համար: Այդ աղյուսակները թույլ են տալիս արտահայտությունների արժեքները գտնել մինչև 10^{-4} ճշգրտությամբ (այսինքն՝ աղյուսակով գտնված մոտավոր արժեքը ճշգրիտ արժեքից տարբերվում է 10^{-4}-ից ոչ ավելի): Այդ նույն աղյուսակներով կարելի է գտնել α անկյունը, եթե հայտնի են $\sin\alpha$-ի կամ $\cos\alpha$-ի արժեքները:

Օ ր ի ն ա կ 1 : Գտնել $\sin 61^0 30$-ն:

Որոնելի արժեքը աղյուսակում գտնում ենք ձախից 61^0 նշումով տողի և վերևից 30 նշումով սյան հատման տեղում. $\sin 61^0 30 = 0{,}8788$:

Պ ա ր զ ա բ ա ն ու մ : Չնայած 0,8788 թիվը $\sin 61^0 30$-ի մոտավոր արժեքն է, սակայն $\sin 61^0 30 \approx 0{,}8788$ գրության փոխարեն, սովորաբար, գրում են $\sin 61^0 30 = 0{,}8788$:

A	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60		1	2	3
60^0	0,8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	**29^0**	1	3	4
61^0	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	**28^0**	1	3	4
62^0	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	**27^0**	1	3	4
63^0	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	**26^0**	1	3	4
64^0	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	9063	**25^0**	1	3	4
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	60	54	48	42	36	30	24	18	12	6	0	A	1	3	4

Օ ր ի ն ա կ 2 : Գտնել $\sin 116^0 46$-ն:

Ըստ բերման բանաձևի՝ $\sin 116^0 46 = \sin(180^0 - 116^0 46) = \sin 63^0 14$ և, ուրեմն, խնդիրը հանգում է $\sin 63^0 14$-ի գտնելուն:

Աղյուսակով նախ գտնում ենք տրվածին ամենամոտ անկյան սինուսը՝ $\sin 63^0 12 = 0{,}8926$: Այնուհետև աղյուսակի այդ նույն տողի աջ կողմում, ուղղումների սյունակներում գտնում ենք ուղղումը $14 - 12 = 2$-ի համար: Այն հավասար է 0,0003: Հաշվի առնելով, որ $\sin 63^0 12 < \sin 63^0 14$, գտնված ուղղումն ավելացնում ենք 0,8926-ին. $\sin 63^0 14 = 0{,}8926 + 0{,}0003 = 0{,}8929$:

Օ ր ի ն ա կ 3 : Գտնել $\cos 152^0$-ը:

Ըստ բերման բանաձևի՝ $\cos 152^0=\cos(180^0-28^0)=-\cos 28^0$ և, ուրեմն, խնդիրը հանգում է $\cos 28^0$-ի գտնելուն: Որոնելի արժեքը գտնում ենք աղյուսակի աջից 28^0 նշումով տողի և ներքևից 0^0 նշումով սյան հատման տեղում՝ $\cos 28^0=0,8829$, ուրեմն՝ $\cos 152^0=-0,8829$:

Օ ր ի ն ա կ 4 : Գտնել $\cos 26^0 35'$-ն:

Աղյուսակով նախ գտնում ենք տրվածին ամենամոտ անկյան կոսինուսը. $\cos 26^0 36'=0,8942$: Այնուհետև աջ կողմի ուղղումների աղյուսակում գտնում ենք ուղղումը $36'-35'=1'$-ի համար: Այն հավասար է 0,0001: Քանի որ $\cos 26^0 35' > \cos 26^0 36'$, ապա գտնված ուղղումն ավելացնում ենք 0,8942-ին. $\cos 26^0 35'=0,8942+0,0001=0,8943$:

Էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայով հաշվելիս $\sin\alpha$-ի, $\cos\alpha$-ի, $\mathrm{tg}\alpha$-ի արժեքները որևէ աղյուսակից չեն վերցվում (այդ աղյուսակները մեքենայի հիշողությունը խիստ կծանրաբեռնեին): Դրանք՝ ցանկացած α անկյան համար և անհրաժեշտ ճշգրտությամբ հաշվարկվում են հենց մեքենայի կողմից: Այդ նպատակով օգտագործվում են եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքներ հաշվելու, այսպես կոչված, ստանդարտ ծրագրեր: Այդ ծրագրերը նախապես զետեղված են ԷՀՄ-ի մեջ, և այս կամ այն անկյան որևէ եռանկյունաչափական ֆունկցիայի արժեքը հաշվելու անհրաժեշտության դեպքում մեքենան՝ ինքն է օգտվում այդ ծրագրից և հաշվում պահանջված արժեքը: Նույնանման ստանդարտ ծրագրեր զետեղված են նաև միկրո-հաշվարկիչում:

ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԻ ՀԱՄԱՌՈՏ ՏԵՂԵԿԱՏՈՒ

1. Եռանկյուն (կողմերը՝ a, b, c, կողմերի հանդիպակաց անկյունները՝ α, β, γ, կիսապարագիծը՝ p, արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ R, ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ r, մակերեսը՝ S, a կողմին տարված բարձրությունը՝ h_a).

$$S=\frac{1}{2}ah_a,\qquad S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ (Հերոնի բանաձևը),

$$r=\frac{S}{p},\qquad R=\frac{abc}{4s},$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$ (կոսինուսների թեորեմը),

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$ (սինուսների թեորեմը)։

2. Ուղղանկյուն եռանկյուն (էջերը՝ a, b, ներքնաձիգը՝ c, ներքնաձիգի վրա էջերի պրոյեկցիաները՝ a_c, b_c).

$$S=\frac{1}{2}ab,\qquad S=\frac{1}{2}ch_c$$

$$r=\frac{a+b-c}{2},\qquad R=\frac{c}{2},$$

$$a^2+b^2=c^2$$ (Պյութագորասի թեորեմը),

$$\frac{a_c}{h_c}=\frac{h_c}{b_c},\qquad \frac{a_c}{a}=\frac{a}{c},\qquad \frac{b_c}{b}=\frac{b}{c},$$

$$a=c\sin\alpha=c\cos\beta=b\,tg\alpha=b\,ctg\beta:$$

3. Հավասարակողմ եռանկյուն.

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\qquad r=\frac{a\sqrt{3}}{6},\qquad R=\frac{a\sqrt{3}}{3}:$$

4. Ուռուցիկ քառանկյուն (անկյունագծերը՝ d_1, d_2, անկյունագծերի կազմած անկյունը՝ φ, մակերեսը՝ S).

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi:$$

5. Զուգահեռագիծ (կից կողմերը՝ a, b, կից կողմերի կազմած անկյունը՝ α, a կողմին տարված բարձրությունը՝ h_a).

$$S=ah_a=ab\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi:$$

6. **Շեղանկյուն** (կողմը՝ a, անկյունը՝ α).

$$S = ah_a = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2 :$$

7. **Ուղղանկյուն.**

$$S = ab = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin\varphi :$$

8. **Քառակուսի** (անկյունագիծը՝ d).

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2} :$$

9. **Սեղան** (հիմքերը՝ a, b, բարձրությունը՝ h, միջին գիծը՝ ℓ).

$$\ell = \frac{a+b}{2}, \qquad S = \frac{a+b}{2}h = \ell h :$$

10. **Արտագծյալ բազմանկյուն** (կիսապարագիծը՝ p, ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ r).

$$S = pr :$$

11. **Կանոնավոր բազմանկյուն** (կանոնավոր n-անկյան կողմը՝ a_n, արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ R, ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ r).

$$a_3 = R\sqrt{3}, \qquad a_4 = R\sqrt{2}, \qquad a_6 = R,$$

$$S = \frac{na_n r}{2} :$$

12. **Շրջանագիծ, շրջան** (շառավիղը՝ R, շրջանագծի երկարությունը՝ C, շրջանի մակերեսը՝ S).

$$C = 2\pi R, \qquad S = \pi R^2 :$$

13. **Սեկտոր** (աղեղի երկարությունը՝ ℓ, աղեղի աստիճանային չափը՝ n^0).

$$\ell = \frac{\pi R n}{180}, \qquad S = \frac{\pi R^2 n}{360} :$$

14. **Եռանկյունաչափական բանաձևեր.**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\alpha \neq 90^0),$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\alpha \neq 0^0, 180^0):$$

15. **Բերման բանաձևեր.**

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha, \qquad \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\sin(90^0 + \alpha) = \cos\alpha, \qquad \cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha :$$

Պատասխաններ և ցուցումներ

ԳԼՈՒԽ X

1. 6,25: **3.** 10սմ, 20սմ: **4.** 96սմ^2, 24սմ^2: **5.** 60սմ: **6.** 2,5սմ: **7.** 50սմ^2: **8.** $1\frac{2}{7}$սմ: **10.** 1մ, 2մ, 2,5մ: **11.** 5,5մ, 6,5մ: **13.** 8սմ: **15.** 7,5սմ, 12սմ: **16.** 54սմ^2: **17.** 8սմ: **19.** 12սմ, 16սմ, 18սմ կամ 9սմ, 12սմ, 13,5սմ կամ 8սմ, $\frac{32}{3}$սմ, 12սմ: **20.** 3,2սմ: **22.** ա) h=20, $a=4\sqrt{41}$, $b=5\sqrt{41}$, բ) h=48, a=80, b=60, գ) $a=12\sqrt{3}$, c=24, $a_c=18$, դ) $b=8\sqrt{3}$, c=16, $b_c=12$, ե) $h=2\sqrt{5}$, $b=3\sqrt{5}$, $a_c=4$, $b_c=5$: **23.** $a_c=\frac{a^2}{c}$, $b_c=\frac{b^2}{c}$: **24.** Ցուցում: ա) Օգտվել եռանկյան մակերեսը հաշվելու բանաձևից, բ) օգտվել 23 խնդրից: **25.** 32մմ, 18մմ: **26.** 61սմ: **27.** $1\frac{12}{13}$սմ, $11\frac{1}{13}$սմ: **28.** 18սմ, 98սմ: **29.** 2:3: **30.** ա) 15սմ, բ) $10\frac{2}{3}$սմ: **31.** BD=8սմ, DC=12սմ: **32.** AB=18սմ, AC=6սմ: **33.** NE=3,5սմ, EK=2,5սմ: **34.** 10սմ կամ 22,5սմ կամ 15սմ: **35.** ա) Այո, բ) ոչ, գ) ոչ, դ) այո: **36.** $\frac{b}{a+c}$: **37.** AE=6սմ, EC=4սմ, DE=6սմ: **38.** $\frac{ab}{a+b}$: **39.** ա) 17,5սմ, բ) BD=5սմ, DE=6սմ, գ) 8սմ: **40.** ա) $\frac{1}{2}$, բ) $\frac{1}{4}$: Ցուցում: D կետով տանել BK-ին զուգահեռ ուղիղ: **41.** ա)12դմ, բ) 18դմ, գ) 3,4մ: **42.** ա) Այո, բ) այո, ոչ: **43.** 2,4մ, 3մ: **44.** 3,15մ: **45.** 6,936մ: **46.** 6,12մ: **47.** 2,5մ: **48.** 48մ: **49.** 72,25մ: **52.** Ցուցում: Նախ կառուցել որոնելի եռանկյանը նման եռանկյուն: **53.** Ցուցում: Տե՛ս 52 խնդրի ցուցումը: **54.** Ցուցում: Տե՛ս 52 խնդրի ցուցումը: **55.** Ցուցում: Տե՛ս 52 խնդրի ցուցումը: **56.** Ցուցում: Տե՛ս 52 խնդրի ցուցումը: **57.** ա) 6սմ, բ) 12սմ, գ) 10դմ: **58.** 16սմ: **59.** ա) D կետը գտնվում է շրջանի ներսում, բ) D կետը գտնվում է շրջանագծի վրա, գ) D կետը գտնվում է շրջանից դուրս: **60.** 21դմ, 29դմ: **61.** 40սմ: **62.** Ոչ: **63.** 24մ: **64.** 33մ: **65.** 8սմ, 24սմ: **66.** ա) 6սմ, բ) 3դմ, գ) $\sqrt{3}$մ: **67.** 21սմ: **68.** 1,5 անգամ: **69.** ա) CD=3սմ, բ) AD=18սմ, գ) AB=0,5(1+$\sqrt{5}$)a: **70.** 17սմ: **71.** 10սմ: **72.** 5սմ, 3սմ: **73.** ≈226կմ: **74.** 13սմ: **77.** $\frac{7}{8}$: **78.** 18սմ, 12սմ: **79.** Ցուցում: Օգտվել եռանկյան կիսորդի հատկությունից: **81.** DC=$2\frac{2}{3}$սմ, DB=$2\sqrt{13}$սմ, CB=$\frac{2}{3}\sqrt{61}$սմ: Ցուցում: Նախ ապացուցել, որ

$\Delta ADC \sim \Delta BAD$: **82.** $\frac{2ab}{a+b}$: **84.** Ցուցում: Օգտվել եռանկյան կիսորդի հատկությունից և BDM ու BAN, ինչպես նաև EMC ու ANC եռանկյունների նմանությունից, որտեղ M-ը BC-ի միջնակետն է, իսկ N-ը կիսորդի հիմքը: **89.** $AB=\sqrt{a(a+b)}$, $CD=\sqrt{b(a+b)}$: **90.** 13մ: **91.** 13,44սմ: **92.** 1,1սմ: **93.** 1:1 :

ԳԼՈՒԽ XI

103. ա) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ և $\sqrt{3}$, բ) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ և $\frac{\sqrt{5}}{2}$, գ) $\frac{1}{2}$ և $\sqrt{3}$, դ) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ և $\frac{\sqrt{15}}{15}$: **104.** ա) $\frac{b}{\sin\beta}$, $\frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$, $90°-\beta$, բ) ≈13,05սմ, ≈8,39սմ, 40^0: **106.** ա) Ոչ, բ) այո: **108.** $90^0-\alpha$, c $\sin\alpha$, c $\cos\alpha$: 55^0, ≈14սմ, ≈20սմ: **109.** ա) $\frac{b}{2\cos\alpha}$, բ) $\frac{b\operatorname{tg}\alpha}{2}$: **110.** $b\sin\alpha$: **112.** ≈74մ: **113.** 60^0, 120^0, 60^0 և 120^0: **114.** 60^0 և 30^0: **115.** ≈71,6սմ^2: **116.** ≈33,6, ≈49,7: **117.** ա) O(0,0), A(5,0), B(0,3), բ) O(0,0), A(a,0), B(0, b): **118.** ա) 0(0,0), A(6,5,0), C(6,5, 3), B(0,3), բ) 0(0,0), A(a,0), C(a,b), B(0,b): **119.** M(3,-3), N(3,3), Q(-3,-3) կամ M(3,-3), N(-3, -3), Q(3,3): **120.** A(-a,0), B(a,0), C(0,h): **121.** (7,-3): **123.** C(10,-7), D(7,5,-5): **124.** ա)2, բ) 3, գ) $\sqrt{13}$: **125.** ա)4, բ)8, գ) 5, դ) 5: **126.** $\sqrt{82}+2\sqrt{17}+7\sqrt{2}$: **127.** ա) 2, բ) 3 կամ –2,6: **129.** ա) (0,-9), բ) (0,5): **130.** ա) (-2,5,0), բ) (8,0): **131.** ա) $MP=3\sqrt{5}$, NQ=5, բ) $MP=4\sqrt{2}$, $NQ=2\sqrt{2}$: **132.** Ցուցում: Ապացուցել, որ AC և BD հատվածները հավասար են, և դրանց միջնակետերը համընկնում են: ա) 8, բ) 17: **135.** 100սմ, 100սմ: Ցուցում: Կոորդինատային համակարգը ընտրել այնպես, ինչպես ցույց է տրված 28 նկարում: **136.** 13սմ: Ցուցում: Կոորդինատային համակարգը ընտրել այնպես, որպեսզի եռանկյան հիմքը գտնվի Ox առանցքի վրա, իսկ բարձրությունը Oy-ի: **137.** Կոորդինատային համակարգը ընտրել այնպես, որպեսզի սեղանի հիմքերից մեկը գտնվի Ox առանցքի վրա, իսկ դրա ծայրակետերը լինեն համաչափ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ: **139.** Ցուցում: Կոորդինատային համակարգը ընտրել այնպես, ինչպես ցույց է տրված 30 նկարում, և ապացուցել, որ b=0: **140.** Ցուցում: Կոորդինատային համակարգը ընտրել այնպես, որպեսզի AB և AD ճառագայթները հանդիսանան դրական կիսառանցքներ: **143.** ա) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, բ) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, գ) $\sin\alpha=0$:

144. ա) $\cos\alpha=\pm\frac{1}{2}$, բ) $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$, գ) $\cos\alpha=\pm1$: **145.** ա) $tg\alpha=0$, բ) $tg\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, գ) $tg\alpha=1$, դ) $tg\alpha=-\frac{3}{4}$: **146.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1; $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$: **148.** ա) $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, բ) $A(0,\ 1{,}5)$, գ) $A\left(-2{,}5\sqrt{3},\ 2{,}5\right)$, դ) $A(-1{,}0)$, ե) $A\left(\sqrt{3},1\right)$: **149.** ա) 45^0, բ) 90^0, գ) 150^0, դ) 135^0: **152.** ա) $\sin\alpha<\sin\beta$, բ) $\sin\alpha>\sin\beta$: **153.** ա) $\cos\alpha>\cos\beta$, բ) $\cos\alpha>\cos\beta$: **154.** ա) $tg\alpha<tg\beta$, բ) $tg\alpha<tg\beta$: **155.** ա) $\sin172^0$, $\sin12^0$, $\sin36^0$, բ) $\cos95^0$, $\cos64^0$, $\cos34^0$, գ) $tg30^0$, 1, $tg70^0$: **156.** ա) $\angle A$-ն սուր անկյուն է, բ) $\angle A$-ն ուղիղ անկյուն է, գ) $\angle A$-ն բութ անկյուն է, դ) $\angle A$-ն սուր անկյուն է, ե) $\angle A$-ն բութ անկյուն է: **157.** ա) $12\sqrt{6}$ սմ², բ) 27սմ², գ) ≈36սմ²: **158.** 16սմ: **159.** ա) $\frac{h_b h_c}{2\sin\alpha}$, բ) $\frac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$: **160.** 1սմ²: **161.** BC=4սմ: **162.** $\frac{18}{7}\sin2\alpha$ սմ²:

163. $4\sin\alpha$ սմ²: **164.** $36\sqrt{3}$ սմ²: **165.** ա) $\angle C=80^0$, $a\approx12{,}3$, $b\approx9{,}1$, բ) $\angle B=75^0$, $c\approx4{,}5$, $a\approx2{,}3$, գ) $\angle B\approx37{,}989^0\approx37^059$, $\angle c\approx62^001$, $c\approx14$, դ) $\angle A=65^0$, $b\approx19{,}2$, $c\approx25{,}5$, ե) $\angle B=37{,}317^0\approx37^019$, $\angle c\approx82^041$, $c\approx11$, զ) $c\approx5{,}7$, $\angle A=\angle B=63^0$, է) $a\approx53{,}84$, $\angle B=36{,}296^0\approx36^018$, $\angle c=56^042$, ը) $\angle A\approx42{,}833^0\approx42^050$, $\angle B\approx60{,}941^0\approx60^057$, $\angle c\approx76^013$, թ) $\angle A=$ $=54{,}883^0\approx54^052$, $\angle B\approx84{,}270^0\approx84^016$, $\angle c\approx40^052$: **166.** AB≈15սմ, $S_{ABC}\approx87$սմ²: **167.** AC=6մ, AB≈3մ, BC≈4մ: **168.** $\frac{a\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}$, $\frac{a\sin\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}$, $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma}$, որտեղ $\gamma=\frac{\alpha-\beta}{2}$ եթե $\alpha\geq\beta$ և $\gamma=\frac{\beta-\alpha}{2}$, եթե $\beta>\alpha$: **169.** ա) Սուրանկյուն, բ) ուղղանկյուն, գ) բութանկյուն: **170.** 60^0 կամ $\approx47^07$: **171.** 10սմ: **172.** AM=7: **173.** 8,125սմ: **174.** $\sqrt{2}$: **175.** ≈59մ: **176.** ≈14,5մ: **177.** 50մ: **178.** $72\sqrt{3}$ սմ²: **179.** 4սմ: **180.** $20\sqrt{3}$ սմ²: **181.** 10սմ: **182.** $4\frac{8}{13}$սմ: **183.** 30^0, 150^0: **184.** 81սմ²: **185.** $4\sqrt{3}$ սմ²: **186.** 8,125: **187.** $13{,}5\sqrt{3}$ սմ²: **191.** 256սմ²: **193.** $BE=\frac{b}{2}$, $AD=\frac{b}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $AE=\frac{b}{2}\sqrt{3}$, $EC=\frac{b}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$, $BC=b\sqrt{2-\sqrt{3}}$: **194.** ա) ≈6,254մ², բ) ≈6449073մ²:

195. ա) $\angle C=105^0$, AC≈6սմ, BC≈4սմ, բ) $\angle A=75^0$, BC≈6սմ, AC≈4սմ, գ) $\angle C\approx42^055$, $\angle B\approx88^035$, AC≈4սմ, դ) $\angle A\approx26^022$, $\angle C\approx90^050$, AB≈11,7սմ: **196.** ա) BC≈12սմ, $\angle C\approx17^045$, $\angle B\approx27^015$, բ) $AC=\sqrt{5}$ դմ, $\angle A\approx71^034$, $\angle C\approx63^026$, գ) AB≈6,4դմ, $\angle A=2^0$, $\angle B=28^0$: **197.** Ոչ: Ցուցում:

Օգտվել սինուսների թեորեմից: **198.** Ոչ: **201.** $2\sqrt{7}$ սմ: **202.** $10\sqrt{\frac{3}{61}}$ սմ:

203. $\angle D\approx117^0 10$, $\angle E\approx38^0 59$, $\angle F\approx23^0 51$: **204.** $\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$: Ցուցում: Օգտվել եռանկյան մակերեսի բանաձևից: **206.** $52{,}5\sqrt{3}$ սմ^2: **207.** 7սմ, 8սմ: **208.** $32\sqrt{3}$ սմ^2: **210.** $a\sqrt{2}$: **211.** $2a(1+\cos\alpha)$:

ԳԼՈՒԽ XII

212. ա) Այո, բ) ոչ: **213.** բ), գ): **215.** ա) 60^0, բ) 108^0, գ) 120^0, դ) 144^0, ե) 160^0: **216.** 360^0: **217.** ա) 3, բ) 4, գ) 8, դ) 12: **218.** ա) 6, բ) 12, գ) 4, դ) 10, ե) 20, զ) 5: **219.** ա) 10, բ) 15: **220.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{2a\sqrt{3}}{3}$: **221.** $b\sqrt{3}$, 2b:

222. 3: **226.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$: **227.** 18սմ, $9\sqrt{3}$ սմ^2: **228.** 24սմ, $24\sqrt{3}$ սմ^2:

229. 1) $R=3\sqrt{2}$, r=3, p=24, S=36, 2) $R=2\sqrt{2}$, $a_4=4$, p=16, S=16, 3) $r=2\sqrt{2}$, $a_4=4\sqrt{2}$, $P=16\sqrt{2}$, S=32, 4) $R=3{,}5\sqrt{2}$, r=3,5, $a_4=7$, S=49, 5) $R=2\sqrt{2}$, r=2, $a_4=4$, P=16: **230.** 1) r=1,5, $a_3=3\sqrt{3}$, $P=9\sqrt{3}$, $S=\frac{27\sqrt{3}}{4}$, 2) $R=\frac{2}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$, $r=\frac{1}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$, $a_3=2\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$, $P=6\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$, 3) R=4, $a_3=4\sqrt{3}$, $P=12\sqrt{3}$, $S=12\sqrt{3}$, 4) $R=\frac{5\sqrt{3}}{3}$, $r=\frac{5\sqrt{3}}{6}$, P=15, $S=\frac{25\sqrt{3}}{4}$, 5) $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $a_3=2$, $S=\sqrt{3}$: **231.** Ցուցում: Օգտվել այն բանից, որ կանոնավոր բազմանկյան ցանկացած կողմի միջնուղղահայացը անցնում է արտագծած շրջանագծի կենտրոնով: **232.** Ցուցում: Օգտվել այն բանից, որ կանոնավոր բազմանկյան ցանկացած անկյան կիսորդն անցնում է ներգծած շրջանագծի կենտրոնով: **235.** $2\sqrt{3}$ սմ: **236.** $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ սմ^2: **237.** $S_3:S_4:S_6=\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$: **238.** 3:4: **239.** $\sqrt{2}R^2$: **240.** դ) Ցուցում: Օգտվել 33 կետի 2-րդ խնդրից: **243.** ա) 20π մ, բ) 30π մ, գ) 70π մ: **244.** ա) ≈15,9սմ, բ) ≈3,98սմ, գ) ≈7,56սմ: **245.** 8πսմ: **246.** 1) 25,12, 2) 18,84, 3) 13,06, 4) 9, 5) 4,40, 6) 1, 7) 637,42, 8) 14,65, 9) 0,45: **247.** ա) կմեծանա երեք անգամ, բ) կփոքրանա երկու անգամ, գ) կմեծանա k անգամ, դ) կփոքրանա k անգամ: **248.** ա) Կմեծանա k անգամ, բ) կփոքրանա k անգամ: **249.** 25սմ: **250.** ա) πa, բ) $\pi c\left(\sqrt{2}-1\right)$,

գ) $\pi c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$, դ) $\frac{2\pi h \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$: **251.** 1,5մ: **252.** ≈42013կմ: **253.** $21^{0}30'$:

254. 144^{0}: **255.** $1\frac{1}{3}$սմ: **256.** 7,2սմ: **257.** $\frac{\pi a}{3}$, $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}a$, $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}a$: **259.** ≈36,2սմ:

260. ≈$4^{0}35'$: **261.** 1) 12,56, 2) 78,5, 3) 1,69, 4) 0,26, 5) 7, 6) 9258,26, 7) 9,42, 8) 1,41: **262.** ա) կմեծանա k^2 անգամ, բ) կփոքրանա k^2 անգամ: **263.** ա) $\frac{\pi(a^2+b^2)}{4}$, բ) $\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}$, գ) $\frac{\pi(a^2+4h^2)^2}{64h^2}$: **264.** ա) $\frac{\pi a^2}{12}$,

բ) $\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha+1)^2}$, գ) $\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{4\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$, դ) $\frac{\pi a^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$: **265.** D≈13,06մ,

S≈133,89մ^2: **266.** 4πսմ^2: **267.** Փոքրագույն շրջանի մակերեսը π, իսկ օղակների մակերեսները հավասար են՝ 3π, 5π, 7π: **269.** ≈262սմ^2:

270. $\sqrt{\frac{3S}{\pi}}$: **271.** ա) $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{R^2}{2}$, բ) $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{R^2}{2}$, գ) $\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)\frac{R^2}{4}$,

դ) $\left(\frac{\pi}{3}-1\right)\frac{R^2}{4}$: **272.** ա) $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\frac{a^2}{3}$, բ) $\frac{\pi-2}{8}a^2$, գ) $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{a^2}{2}$:

273. ա) $(\pi-2)R^2$, բ) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)R^2$, գ) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)R^2$: **274.** $\frac{4-\pi}{4}a^2$:

275. ա) 20, բ) 9, գ) 5, դ) 6: **276.** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$դմ: **277.** 6,72սմ: **278.** ա) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$,

բ) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$: **281.** ա) 6սմ, $54\sqrt{3}$ սմ^2: **283.** 330կմ: **284.** ա) ≈15,1սմ, բ) $\pi a \sin\alpha$:

285. ≈4,4կմ: **287.** $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$: **288***. Ցուցում: Ցույց տալ, որ AB լարով սեգմենտի մակերեսը հավասար է AD և BD լարերով սեգմենտների մակերեսների գումարին: **289.** Ցուցում: Դիցուք ABCDEFGH-ը որոնելի ութանկյունն է, իսկ O-ն արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը: Նախ կառուցել ABO հավասարասրուն եռանկյունը՝ նկատի ունենալով, որ AOB անկյունը 45^{0} է: **290.** Ցուցում: Օգտագործել Պյութագորասի թեորեմը: **291.** Նախ շրջանագծին ներգծել կանոնավոր եռանկյուն և վեցանկյուն:

ԳԼՈՒԽ XIII

297. բ) դեպքում: **299.** Արագություն, ուժ: **300.** $|\overrightarrow{AB}|=3$սմ, $|\overrightarrow{BC}|=4$սմ, $|\overrightarrow{DC}|=3$սմ, $|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{18,25}$ սմ, $|\overrightarrow{MA}|=1,5$ սմ, $|\overrightarrow{CB}|=4$ սմ, $|\overrightarrow{AC}|=5$սմ:

301. $|\overrightarrow{BD}|=13$ սմ, $|\overrightarrow{CD}|=5\sqrt{2}$ սմ, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{74}$ սմ: **303.** ա) Այո, բ) ոչ, գ) այո, դ) ոչ: **304.** ա) Ոչ, բ) այո, գ) ոչ, դ) ոչ, ե) այո: **306.** ա) Շեղանկյուն, բ) սեղան: **307.** ա) Այո, բ) այո, գ) ոչ, դ) ոչ, ե) այո: **308.** Այո: **315.** *Ցուցում*: Օգտվել եռանկյան անհավասարությունից: **317.** ա) a, բ) $a\sqrt{3}$, գ) $a\sqrt{3}$, դ) a, ե) a: **318.** ա) –2 և 10, բ) 14 և 10, գ) 14 և 10, դ) –2 և 10: **319.** ա) $\overrightarrow{AK}$, բ) $\overrightarrow{AM}$: **321.** $\overrightarrow{XY}=-\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{c}+\vec{d}$: **323.** $\overrightarrow{BM}=-\vec{a}$, $\overrightarrow{NC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MN}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BN}=(\vec{b}-\vec{a})-\vec{a}$: **324.** $\overrightarrow{B_1C}=\vec{x}$, $\overrightarrow{BB_1}=\vec{x}-\vec{y}$, $\overrightarrow{BA}=-\vec{y}$, $\overrightarrow{BC}=2\vec{x}-\vec{y}$: **325.** ա) $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, բ) $\overrightarrow{AC}=-\vec{a}-\vec{b}$, գ) $\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}$: **326.** $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OC}=-\vec{a}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}=-\vec{a}+\vec{b}$: **328.** $|\vec{x}-\vec{y}|=|\vec{x}|+|\vec{y}|$ հավասարությունը իրավացի է, եթե $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{y}$ կամ $\vec{x}$ և $\vec{y}$ վեկտորներից գոնե մեկը զրոյական է: **329.** 60^0: **336.** ա) $4\vec{n}$, բ) $\frac{5}{2}\vec{m}+\frac{3}{2}\vec{n}$, գ) $-\frac{4}{3}\vec{m}-\frac{2}{3}\vec{n}$: **337.** $\overrightarrow{EC}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AG}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$: **338.** $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}$: **339.** ա) $\overrightarrow{AC}=\vec{x}+\vec{y}$, $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})$, $\overrightarrow{CO}=-\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y})$, $\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}(\vec{y}-\vec{x})$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\vec{x}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{y})$, $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}=-\vec{x}-\vec{y}$, բ) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\vec{x}$, $\overrightarrow{MC}=\frac{2}{3}\vec{x}+\vec{y}$, $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\vec{x}-\vec{y}$, $\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{6}\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{y}$: **341.** $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$: **342.** $-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$: **345.** *Ցուցում*: Օգտվել 340 խնդրից: **348.** ա) –4, բ) $\frac{10}{3}$, գ) –1, դ) 5: **349.** ա) 2, բ) $\frac{1}{2}$, գ) $-\frac{1}{2}$, դ) 1, ե) –1, զ) $-\frac{1}{4}$, է) 3, ը) $-\frac{4}{3}$, թ), ժ) այդպիսի k թիվ գոյություն չունի: **350.** ա) Այո, բ) այո: **351.** *Ցուցում*: Ապացուցել հակասող ենթադրությամբ և օգտվել համագիծ վեկտորների վերաբերյալ լեմմից: **352.** $\overrightarrow{AM}=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$: **353.** ա) x=-1, y=3, բ) x=4, y=-5, գ) x=0, y=3, դ) x=-1, $y=\frac{1}{3}$: **355.** ա) $\vec{a}\{2,3\}$, բ) $\vec{b}\{-2,3\}$, $\vec{c}\{2,0\}$, գ) $\vec{d}\{-3,-4\}$, $\vec{e}\{2,-2\}$, $\vec{f}\{-4,-5\}$: **356.** $\vec{a}\{2,3\}$, $\vec{b}\left\{-\frac{1}{2},-2\right\}$, $\vec{c}\{8,0\}$, $\vec{d}\{1,-1\}$, $\vec{e}\{0,-2\}$, $\vec{f}\{-1,0\}$: **357.** ա) $\vec{x}=-3\vec{i}+\frac{1}{5}\vec{j}$, բ) $\vec{y}=-2\vec{i}-3\vec{j}$, գ) $\vec{z}=-\vec{i}$, դ) $\vec{u}=3\vec{j}$, ե) $\vec{v}=\vec{j}$: **358.** ա) x=5, y=-2, բ) x=-3, y=7, գ) x=-4,

y=0, դ) x=0, y=0: **359.** ա) $\{5,7\}$, բ) $\{4,1\}$, գ) $\{1,1\}$, դ) $\{-1,0\}$: **360.** ա) $\{3,2\}$, բ) $\{6,0\}$, գ) $\{-1,9\}$, դ) $\{-7,-2\}$: **361.** $2\vec{a}\{6,4\}$, $3\vec{a}\{9,6\}$, $-\vec{a}\{-3,-2\}$, $-3\vec{a}\{-9,-6\}$: **362.** $\{-2,-4\}$, $\{2,0\}$, $\{0,0\}$, $\{2,3\}$, $\{-2,3\}$, $\{0,-5\}$: **363.** ա) 45^0, բ) 90^0, գ) 90^0, դ) 90^0, ե) 90^0, զ) 135^0, է) 0^0: **364.** ա) 60^0, բ) 120^0, գ) 120^0, դ) 90^0, ե) 0^0, զ) 180^0: **365.** ա) $3\sqrt{2}$, բ) 0, գ) $-3\sqrt{2}$: **366.** ա) $\frac{a^2}{2}$, բ) $-\frac{a^2}{2}$, գ) 0, դ) a^2: **367*.** ա) $\frac{1}{2}$սմ^2, բ) $-\frac{1}{2}$սմ^2, գ) 1սմ^2, դ) 3սմ^2: **369.** Ցուցում: Եթե $\vec{x}$ և $\vec{y}$ վեկտորները տարագիծ են, օգտվել վեկտորների գումարման եռանկյան կանոնից, իսկ եթե համագիծ են՝ 368 խնդրից: **370.** $-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$:

371. $\overrightarrow{XY}=-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$, $\overrightarrow{MP}=-\vec{a}+\vec{b}$: **372.** $\overrightarrow{CK}=\vec{a}$, $\overrightarrow{KD}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$: **377.** $\frac{3}{4}\vec{a}$: **378.** Ցուցում: Օգտվել անկյան կիսորդի հատկությունից: **379.** ա) –0,5, բ) հնարավոր չէ, գ) –2, դ) 2: **380.** ա) $\vec{p}\{-8,13\}$, բ) $\vec{p}\{14,4\}$, գ) $\vec{p}\{-21,5\}$, դ) $\vec{p}\{6,-18\}$:

ԴԺՎԱՐԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Նմանության կիրառություններ, մակերեսներ

381. $\frac{S_1S_3(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_2(S_2^2-S_1\cdot S_3)}$: Ցուցում: Օգտվել «Եթե երկու եռանկյան բարձրությունները հավասար են, ապա մակերեսները հարաբերում են ինչպես հիմքերը» պնդումից: **382.** $\left(\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2}\right)^3$: Օգտվել հավասար անկյուն ունեցող երկու եռանկյան մակերեսների հարաբերության վերաբերյալ թեորեմից: **383.** $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$: Ցուցում: Նախ ապացուցել, որ $S_{AOB}=S_{COD}=\sqrt{S_1S_2}$: **384.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$: **385.** Ցուցում: Նախ ապացուցել, որ $S_{AKM}=S_{CMK}$ և $S_{BMK}=S_{DMK}$: **386.** Ցուցում: Ստացված երեք քառանկյուններից յուրաքանչյուրում տանել անկյունագծերն այնպես, որպեսզի ոչ մի երկու անկյունագիծ չունենան ընդհանուր ծայրակետ, և ապացուցել, որ երկու միջին եռանկյուններից յուրաքանչյուրի մակերեսը հավասար է համապատասխան եզրային եռանկյունների մակերեսների կիսագումարին: **387.** $2\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$: Ցուցում: Դիցուք AB-ն և AD-ն տրված O անկյան կողմերը պարունակող ուղիղներին տարված ուղղահայացներն են, իսկ C-ն AB և OD ուղիղների հատման

կետն է: Դիտարկել ADC և OBC ուղղանկյուն եռանկյունները: **388.** $2\sqrt{S_1S_2}$: *Ցուցում*: Հաշվի առնել, որ BKC և MCD եռանկյուններն ունեն մեկական հավասար անկյուն, և օգտվել հավասար անկյուն ունեցող երկու եռանկյան մակերեսների հարաբերության վերաբերյալ թեորեմից: **389.** *Ցուցում*: Նախ ապացուցել, որ BEO և COT եռանկյունները նման են, որտեղ O-ն անկյունագծերի հատման կետն է (կամ նախ ապացուցել, որ BTC և ETC եռանկյունների մակերեսները հավասար են): **390.** *Ցուցում*: Դիցուք AK-ն ABC եռանկյան կիսորդն է, և օրինակ, AC>AB: Օգտվելով անկյան կիսորդի հատկությունից նախ ապացուցել, որ M կետը գտնվում է K և C կետերի միջև: Այնուհետև օգտվել անկյան կողմերը զուգահեռ ուղիղների հատումից առաջացած հատվածների հատկությունից՝ նախապես ցույց տալով, որ AD=AE: **391.** *Ցուցում*: Օգտվել հետևյալ պնդումից. սուրանկյուն եռանկյան երկու բարձրությունների հիմքերը միացնող հատվածը եռանկյունուց անջատում է իրեն նման եռանկյուն: **392.** *Ցուցում*: Նախ ապացուցել, որ ΔMBC~ΔMFK և ΔMAC~ΔMEK, և ստանալ FM=ME, որտեղ M-ը CK և AB ուղիղների հատման կետն է: **393.** *Ցուցում*: Նախ ցույց տալ, որ ∠B=2∠A և ∠C=2∠B, իսկ այնուհետև, տանելով BD և CE կիսորդները, ապացուցել, որ ΔABC~ΔBDC և ΔABC~ΔACE: **394.** *Ցուցում*: Օգտվել այն բանից, որ AH-ը BDH եռանկյանը նման եռանկյան միջնագիծն է: **395.** *Ցուցում*: ա) Դիտարկելով նման եռանկյունները նախ ապացուցել, որ $AD^2=AC\cdot AE$, $DB^2=BC\cdot BF$ և $CD^2=AD\cdot DB$, բ) կիրառել Պյութագորասի թեորեմը AED և DFB եռանկյունների նկատմամբ, գ) օգտվել AED և ACB, ինչպես նաև DBF և ABC եռանկյունների նմանությունից: **396.** *Ցուցում*: Օգտվել «Կամայական քառանկյան կողմերի միջնակետերը զուգահեռագծի գագաթներ են» պնդումից: **397.** *Ցուցում*: Օգտվել եռանկյան միջին գծի վերաբերյալ թեորեմից և հետևյալ պնդումներից. ա) «Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգին տարված միջնագիծը հավասար է ներքնաձիգի կեսին» և բ) «Հավասարասրուն սեղանի հիմքերի միջնակետերով անցնող ուղիղը ուղղահայաց է հիմքերին» պնդումներից: **398.** *Ցուցում*: Շարունակել AM և AK ուղղահայացները մինչև BC ուղղի հետ D և E կետերում հատվելը, և ապացուցել, որ MK-ն DAE եռանկյան միջին գիծն է, և DE-ն հավասար է ABC եռանկյան պարագծին: **399.** *Ցուցում*: Օգտվել «Եռանկյան գագաթը հանդիպակաց կողմի կամայական կետի հետ միացնող հատվածի միջնակետը գտնվում է մյուս երկու կողմերի միջնակետերը որպես ծայրակետեր ունեցող հատվածի վրա» պնդումից: **400.** *Ցուցում*: Օգտվել 399 խնդրից: **401.** *Ցուցում*: Դիցուք N-ը AC-ի միջնակետն է: Նախ ապացուցել, որ MBC և MNC եռանկյունները հավասար են և BN-ը AKC եռանկյան միջին գիծն է: Այնուհետև օգտվել «Եթե երկու եռանկյան բարձրությունները հավասար են, ապա դրանց մակերեսները հարաբերում են ինչպես հիմքերը»

պնդումից: **402.** $\frac{1}{5}$: **403.** *Ցուցում:* Օգտվել MND և MAB, MAD և MPB եռանկյունների նմանությունից: **404**. *Ցուցում:* Դիցուք ABCD-ն հավասարասրուն սեղան է, իսկ X-ը AD մեծ հիմքի որոնելի կետն է: Նախ ապացուցել, որ $\frac{AX}{XD}=n$ և օգտվել AB-ն տրված սրունքն է: Նախ ապացուցել, որ հատվածը տրված հատվածներին համեմատական մասերի բաժանելու խնդրից: **405.** Լուծում: A սկզբնակետով կամայական ճառագայթի վրա տեղադրենք AC հատվածին հավասար AC_1 հատվածը, իսկ C_1A ճառագայթի վրա C_1 կետից տեղադրենք CB հատվածին հավասար C_1B_1 հատվածը (կատարեք գծագիրը): Համոզվեք այն բանում, որ C_1 կետով անցնող և BB_1-ին զուգահեռ ուղիղը AB ուղիղը հատում է որոնելի D կետում: Խնդիրը լուծում չունի, եթե C-ն AB հատվածի միջնակետն է: **406.** *Ցուցում:* Դիցուք ABC-ն որոնելի եռանկյունն է, որի AB, AC կողմերը և AD կիսորդը տրված են: AD ուղղի վրա նշել E կետն այնպես, որ BE||AC: Օգտվելով ADC և EDB եռանկյունների նմանությունից և անկյան կիսորդի հատկությունից, նախ կառուցել DE հատվածը, իսկ այնուհետև ABE հավասարասրուն եռանկյունը ըստ երեք կողմերի: **407.** *Ցուցում:* Նախ կառուցել որոնելի ABC եռանկյանը նման որևէ եռանկյուն: **408.** *Ցուցում:* Դիցուք h_a-ն, h_b-ն, h_c-ն տրված բարձրություններն են: Օգտվել այն բանից, որ որոնելի եռանկյան a, b, և c կողմերը համեմատական են h_b, h_a և $\frac{h_a h_b}{h_c}$ հատվածներին: **409.** *Ցուցում:* Դիցուք ABCD-ն որոնելի սեղանն է, որի A անկյունը, AB սրունքը և AD մեծ հիմքը հայտնի են: Նախ կառուցել ABD եռանկյունը, այնուհետև BCD եռանկյունը ըստ B անկյան, BD կողմի և մյուս երկու կողմերի հարաբերության: **410.** *Ցուցում:* Նախ որոնելի շեղանկյան անկյունագծերը արտահայտել տրված քառակուսու կողմի և տրված հատվածների միջոցով: **411.** *Ցուցում:* Նախ ապացուցել, որ $\Delta ABC \sim \Delta BAD$: **412.** *Ցուցում:* Դիտարկել երկու դեպք. ուղիղների հատման կետը գտնվում է շրջանի ներսում, և շրջանից դուրս: Առաջին դեպքում օգտվել հատվող լարերի արտադրյալների վերաբերյալ թեորեմից: **413.** *Ցուցում:* Ապացուցել, որ այդ մեծությունը հավասար է տրված շրջանագծի տրամագծին: **414.** 146^0 և 107^0: *Ցուցում:* Նախ ապացուցել, որ M կետը գտնվում է A կենտրոնով և AB շառավիղով շրջանագծի վրա: **415.** *Ցուցում:* Նախ ապացուցել, որ տարված ուղիղներից դրանք, որոնք առաջացնում են նոր եռանկյուն, եռանկյան արտաքին անկյունների կիսորդներն են, և օգտվել անկյան կիսորդի համապատասխան հատկությունից: **416.** *Ցուցում:* Դիցուք E կետը BD ճառագայթի և ABC եռանկյանը արտագծյալ շրջանագծի հատման կետն է: Օգտվել ABE և BCD

եռանկյունների նմանությունից և հատվող լարերի հատկությունից: **417.** *Ցուցում*: Նշված կիսորդների հատման կետով տանել AB ուղղին զուգահեռ ուղիղ՝ մինչև AD և BC ուղիղների հետ E և F կետերում հատվելը և ապացուցել, որ EF=DC: **418.** *Ցուցում*: Դիցուք ABCD-ն տրված սեղանն է, որը արտագծված է r շառավիղով շրջանագծին, իսկ AD=a, BC=b դրա հիմքերն են: Նախ ապացուցել, որ $r=\frac{ab}{a+b}$: **419.** *Ցուցում*: ABCD քառանկյան AC անկյունագծի վրա վերցնել K կետն այնպես, որ $\angle ABK=\angle CBD$, այնուհետև օգտագործել ABK և DBC, BCK և ABD եռանկյունների նմանությունը: **420.** *Ցուցում*: Ներգծյալ շրջանագծի M կենտրոնով տանել արտագծյալ շրջանագծի PQ տրամագիծը և սկզբում ապացուցել, որ $PM\cdot MQ=2Rr$: **421.** *Ցուցում*: Ապացուցել, որ A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 կետերը գտնվում են OH հատվածի միջնակետում կենտրոն ունեցող և $\frac{R}{2}$ շառավիղով շրջանագծի վրա, որտեղ R-ը ABC եռանկյան արտագծյալ շրջանագծի շառավիղն է: **422.** *Ցուցում*: Դիցուք ABC-ն տրված եռանկյունն է, իսկ H, K, M կետերը արտագծյալ շրջանագծի AC աղեղին պատկանող D կետից AB, AC և BC ուղիղներից տարված ուղղահայացների հիմքերն են: Ենթադրենք, որ DK ճառագայթը գտնվում է HDM անկյան ներսում: Նախ ապացուցել, որ $\angle AKH=\angle ADH=\angle MDC=\angle MKC$: **423.** ա) *Ցուցում*: Նախ կառուցել տրված կողմով և հանդիպակաց անկյունով որևէ եռանկյուն, այնուհետև դրան արտագծել շրջանագիծ, իսկ հետո՝ կողմին տարված ուղղահայացի վրա տեղադրել բարձրությունը ու նրա ծայրով տանել կողմին զուգահեռ և օգտվել միևնույն աղեղի վրա հենված ներգծյալ անկյունների հավասարության փաստից: բ) *Ցուցում*: Դիցուք ABC-ն որոնելի եռանկյունն է, $\angle B$-ն տրված անկյունը: CA ճառագայթի շարունակության վրա տեղադրենք $AA_1=AB$ հատվածը, իսկ AC ճառագայթի շարունակության վրա՝ $CB_1=BC$ հատվածը և ցույց տալ, որ $\angle A_1BB_1=90^0+\frac{B}{2}$: Օգտվելով 423 խնդրից՝ նախ կառուցել A_1BB_1 եռանկյունը: **424.** *Ցուցում*: Դիցուք PQR-ը որոնելի եռանկյունն է: P-ն այն գագաթն է, որից տարված են եռանկյան բարձրությունը, կիսորդը և միջնագիծը, իսկ O-ն եռանկյանը արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը: Հաշվի առնել, որ $BO\perp QR$, իսկ BO-ի և PM-ի հատման կետը QK-ի միջնակետն է: **425.** Չորս լուծում: *Ցուցում*: Օգտվել 415 խնդրից:

Եռանկյունների լուծումը

426. *Ցուցում*: Նշանակելով MN=a նախ գտնել AMB եռանկյան մակերեսը և AM ու BM կողմերը: **427.** *Ցուցում*: Ապացուցել, որ ցան-

կացած ABCD ուռուցիկ քառանկյան մեջ տեղի ունի $S_{ODC} \cdot S_{OAB} = S_{OBC} \cdot S_{OAD}$ (O-ն անկյունագծերի հատման կետն է): **458.** Ցուցում: Նախ ապացուցել պնդումը ուռուցիկ քառանկյան համար: Դրա համար տանել a և d կողմերի ընդհանուր ծայրակետը b և c կողմերի ընդհանուր ծայրակետի հետ միացնող անկյունագիծ և հաշվել ստացված եռանկյունների մակերեսները: **429.** Ցուցում: Օգտվել այն բանից, որ $S_{ABC} = S_{AA_1B} + S_{AA_1C}$: **430.** $\sqrt{\dfrac{a^2bc+d^2bc+b^2ad+c^2ad}{ad+bc}}$, $\sqrt{\dfrac{c^2ab+d^2ab+a^2dc+b^2dc}{ab+dc}}$, որտեղ a-ն, b-ն, c-ն, d-ն ներգծյալ քառանկյան կողմերն են: **431.** Ցուցում: Օգտվել կոսինուսների թեորեմից, ապացուցել, որ a և b կողմերով անկյան սինուսը հավասար է $\dfrac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd}$, որտեղ p-ն կիսապարագիծն է: **432.** Ցուցում: Նախ ապացուցել, որ ներգծյալ և արտագծյալ շրջանագծերի կենտրոններով անցնող ուղիղը ուղղահայաց է կիսորդներից մեկին այն և միայն այն դեպքում, երբ ներգծյալ շրջանագիծը շոշափում է եռանկյան կողմերից մեկն այնպիսի կետում, որը հավասարահեռ է այդ կողմի միջնակետից և այդ կողմին տարված բարձրության հիմքից: **433.** $72\sin\alpha\cos^3\alpha$: **434.** $2\sqrt{S\operatorname{tg}\beta}$: **435.** $\dfrac{\ell^2-h^2}{2h}$:

Շրջանագծի երկարությունը և շրջանի մակերեսը

436. Ցուցում: Նախ գտնել և համեմատել BAC և AOB անկյունները: **437.** Ցուցում: Օգտվել 436 խնդրից: **438.** Ցուցում: Դիցուք M-ը A_1A_4 հատվածի միջնակետն է: Ապացուցել, որ ACM եռանկյունը հավասարասրուն է, և օգտվելով դրանից, պարզել, որ հնգանկյանը արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնը համընկնում է ACM եռանկյանը ներգծյալ շրջանագծի կենտրոնի հետ: **439*.** Ցուցում: Օգտվել 437 խնդրից: **440*.** Ցուցում: Օգտվել 439* խնդրից: **441.** Ցուցում: Օգտվել 440* խնդրից: **442.** Ցուցում: M կետը միացնել բազմանկյան գագաթների հետ և բազմանկյան մակերեսը ներկայացնել ստացված եռանկյունների մակերեսների գումարի տեսքով: **443.** Ցուցում: Օգտվել 421 խնդրից:

Վեկտորներ

449. Զուգահեռագիծ: **450.** Զուգահեռագիծ: Ցուցում: Օգտվել հետևյալ խնդրից. C-ն AB հատվածի միջնակետն է, O-ն հարթության կամայական կետ է, $\overline{OC} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right)$: **451.** Ցուցում: Հաշվի առնել, որ

$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ և $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ վեկտորների երկարությունները հավասար են: **452.** *Ցուցում:* Դիցուք A, B և C կետերը գտնվում են մեկ ուղղի վրա: Նախ ապացուցել, որ այդ դեպքում $\overrightarrow{AB} = n\overrightarrow{AC}$, որտեղ n-ը ինչ-որ թիվ է: Որպես k, ℓ, m թվերը կարելի է վերցնել, օրինակ, k=n-1, $\ell=1$, m=-n: Հակադարձ պնդումն ապացուցելիս վերցնել A կետի հետ համընկնող O կետը: **453.** *Ցուցում:* Դիցուք ABCD քառանկյան մեջ E և F կետերը AC և BD անկյունագծերի միջնակետերն են, իսկ G-ն հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածների հատման կետն է: Օգտվելով հետևյալ խնդրից. «Կամայական քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները հատման կետով կիսվում են», կամայական O կետի համար $\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ և $\overrightarrow{OG}$ վեկտորներն արտահայտեք $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ և $\overrightarrow{OD}$ վեկտորներով և օգտվել 452 խնդրից: **454.** *Ցուցում:* Օգտվել հետևյալ խնդրից. «ABC եռանկյան A անկյանը հարակից արտաքին անկյան կիսորդը BC ուղիղը հատում է D կետում: Այդ դեպքում $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$ և 452 խնդրից»: **455.** *Ցուցում:* Դիցուք A_1-ը, B_1-ը և C_1-ը ABC եռանկյան BC, CA և AB կողմերի միջնակետերն են: Օգտվելով այն բանից, որ $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA_1}$, $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB_1}$ և $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC_1}$, ապացուցել, որ $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Լրացված և փոխադրված կետերը՝ 2,13,26,27,37:

Լրացված և փոխադրված խնդիրները՝ 1-21, 28, 29, 34-38, 41-43, 47, 57-75, 85-96, 100, 105-107, 109-111, 116-124, 150-156, 160-164, 170-174, 177-192, 197-202, 206-211, 219-228, 233, 234, 241-245, 249, 253-258, 271-273, 287, 288, 363-366:

Երկրաչափության 6-րդ դասարանի դասագրքի բովանդակությունը

ՆԱԽՆԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ. **1.**Կետեր, ուղիղներ, հատվածներ; **2.**Ուղղի ծողանշումը տեղանքում; **3.**Ճառագայթ; **4.**Անկյուն; **5.**Երկրաչափական պատկերների հավասարությունը; **6.**Հատվածների և անկյունների համեմատումը; **7.**Հատվածի երկարությունը; **8.**Չափման միավորներ; Չափիչ գործիքներ; **9.**Անկյան աստիճանային չափը; **10.**Անկյունների չափումը տեղանքում; **11.**Կից և հակադիր անկյուններ; **12.**Ուղղահայաց ուղիղներ; **13.**Ուղիղ անկյունների կառուցումը տեղանքում:

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ. **14.** Եռանկյուն; **15.**Եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշը; **16.**Ուղղին ուղղահայաց; **17.**Եռանկյան միջնագծերը, կիսորդները և բարձրությունները; **18.**Հավասարասրուն եռանկյան հատկությունները; **19.**Եռանկյունների հավասարության երկրորդ հայտանիշը; **20.**Եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշը;

ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐ. **21.**Զուգահեռ ուղիղների սահմանումը; **22.**Երկու ուղիղների զուգահեռության հայտանիշները; **23.**Զուգահեռ ուղիղների կառուցման գործնական եղանակներ; **24.**Երկրաչափության աքսիոմների մասին; **25.**Զուգահեռ ուղիղների աքսիոմը; **26.**Թեորեմներ երկու զուգահեռ ուղիղներով և հատողով կազմված անկյունների մասին:

ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ. **27.**Թեորեմ եռանկյան անկյունների գումարի մասին; **28.**Սուրանկյուն, ուղղանկյուն և բութանկյուն եռանկյուններ; **29.**Թեորեմ եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև առնչությունների մասին; **30.** Եռանկյան անհավասարությունը; **31.**Ուղղանկյուն եռանկյունների որոշ հատկություններ; **32.**Ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության հայտանիշները; **33.** Կետի հեռավորությունը ուղղից: **34.**Զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը; **35.**Բեկյալի երկարությունը; **36.**Անկյունային անդրադարձիչ; **37.**Պատկերացում քառանիստի մասին:

ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄՆԵՐ. **38.**Շրջանագիծ; **39.**Կառուցումներ կարկինով և քանոնով; **40** Ուղղահայաց ուղիղների և զուգահեռ ուղիղների կառուցումները; **41.**Հատվածի միջնակետի կառուցումը: Հատվածի միջնուղղահայացը; **42.**Անկյան կիսորդի կառուցումը: Անկյան կիսորդի հատկությունը; **43.**Եռանկյան կառուցումը ըստ երեք տարրերի:

Երկրաչափության 7-րդ դասարանի դասագրքի բովանդակությունը

ՔԱՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ. **1.**Բազմանկյուն; **2.** Ուռուցիկ բազմանկյուն; **3.** Քառանկյուն; **4.** Զուգահեռագիծ; **5.** Զուգահեռագծի հայտանիշները; **6.** Եռանկյան միջին գիծը; **7.** Թալեսի թեորեմը; **8.** Սեղան; **9.** Ուղղանկյուն; **10.** Շեղանկյուն և քառակուսի; **11.** Առանցքային և կենտրոնային համաչափություններ; **12.** Տարածական պատկերներ; **13.** Զուգահեռանիստ; **14.** Ուղղանկյունանիստ և խորանարդ; **15.** Պրիզմա (հատվածակողմ); **16.** Բուրգ:

ՇՐՋԱՆԱԳԻԾ. **17.**Երկու կետերով անցնող շրջանագիծը; **18.**Լարի միջնակետով անցնող շառավիղը; **19.**Շրջանագծի որոշումը երեք կետերով; **20.**Շրջանագծի և ուղղի փոխադարձ դասավորությունը; **21.**Շրջանագծի շոշափող; **22.**Շրջանագծի աղեղի աստիճանային չափը; **23.**Թեորեմ ներգծյալ անկյան մասին; **24.**Անկյան կիսորդի և հատվածի միջնուղղահայացի հատկությունները; **25.**Թեորեմ եռանկյան բարձրությունների հատման կետի մասին; **26.**Եռանկյան միջնագծերի հատման կետը; **27.**Ներգծյալ շրջանագիծ; **28.**Արտագծյալ շրջանագիծ; **29.**Երկու շրջանագծերի փոխադարձ դասավորությունը; **30.**Կետերի երկրաչափական տեղը; **31.**Պատկերացում գլանի մասին: **32.**Պատկերացում կոնի մասին; **33.**Պատկերացում գնդի մասին:

ՄԱԿԵՐԵՍ. **34.**Բազմանկյան մակերեսի հասկացությունը; **35.**Քառակուսու մակերեսը; **36.**Ուղղանկյան մակերեսը; **37.**Զուգահեռագծի մակերեսը; **38.**Եռանկյան մակերեսը; **39.**Սեղանի մակերեսը; **40.**Խորանարդի մակերևույթի մակերեսը; **41.**Ուղղանկյունանիստի մակերևույթի մակերեսը; **42.**Պյութագորասի թեորեմը; **43.**Պյութագորասի թեորեմի հակադարձ թեորեմը:

ՆՄԱՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ. **44.**Համեմատական հատվածներ; **45.**Նման եռանկյունների սահմանումը; **46.**Եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշը; **47.**Եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշը; **48.**Եռանկյունների նմանության երրորդ հայտանիշը; **49.**Եռանկյունների նմանության մի քանի կիրառություններ:

Աթանասյան Լևոն Սերգեյի
Բուտուզով Վալենտին Ֆյոդորի
Կադոմցև Սերգեյ Բորիսի
Պոզնյակ Էդուարդ Գենրիխի
Յուդինա Իրինա Իգորի

Հրատարակումը նախապատրաստվել է
ակադեմիկոս *Ա. Ն. Տիխոնովի* գիտական ղեկավարությամբ

Երկրաչափություն

Հանրակրթական դպրոցի 8-րդ դասարանի դասագիրք

Թարգմանված է ռուսերեն 9-րդ հրատարակությունից:
Համապատասխանեցված է առարկայական ծրագրին: Դասագիրքը օգտագործվել են «*Просвещение*» հրատարակչության տրամադրած լրացուցիչ նյութերը:

Թարգմանությունը, փոխադրումները և խմբագրումը՝
Սարիբեկ Հակոբյանի

Մեթոդական մշակումը՝ Ռիտա Խաչատրյանի
Թարգմանության համադրումը՝ Գևորգ Ղարագեբակյանի
Համակարգչային ձևավորումը՝ Գոհար Խաչատրյանի

Հրատարակիչ-տնօրեն՝ *Ս. Հ. Չունգուրյան*
Հրատարակ. խմբագիր՝ *Գ. Ա. Ղարագեբակյան*
Վերստուգող սրբագրիչ՝ *Ռ. Ս. Հակոբյան*
Սրբագրիչներ՝ *Վ. Մ. Ճաչմանյան*
Թ. Մ. Բլբուլյան
Հրատարակ. պատասխանատու՝ *Ա. Մ. Բլբուլյան*

«ԱՍՏՂԻԿ-59» հրատարակչություն (Երևան, Նորք, 2-րդ նորաշեն, տ. 32)
Տպագրված է «Տիգրան Մեծ» հրատարակչության տպարանում